PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 8 — 15. April 1929 — Redaktionsschluß für Nr. 10 am 1. Mai 1929 — 30. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

Ph. Frank, Die Grundbegriffe der analytischen Mechanik als Grundlage der Quanten- und Wellenmechanik. S. 209.

Originalmitteilungen:

H. Lorenz, Der Widerstand von Rohrkrümmern. S. 228.

B. Gutenberg, Über Fortpflanzung von elastischen Wellen in viskosen Medien. S. 230.

O. Martienssen, Antwort auf die Bemerkungen des Herrn Glitscher zu meiner Arbeit in der Phys. Zeitschr. **29**, 295, 1928. S. 231.

K. Glitscher, Erwiderung. S. 232.

O. Martienssen, Schluß-Erwiderung. S. 232.

E. Kobel, Die Verdampfung an der Kathode des Hg-Lichtbogens. S. 233.

V. M. Schulgin, Einige Versuche mit dem elektrolytischen Generator. S. 235.

H. Kniepkamp, Zur Wirkungsweise des Elektronenzählrohres von Geiger und Müller. S. 237.

Fr. Hoffmann, Über die Hartmannsche Beziehung zur Eichung von Spektralapparaten. S. 238.

F. Kirchhof, Über Phosphoreszenz und photochemische Wirkung einiger mit ultraviolettem Licht bestrahlter organischer und anorganischer Substanzen. S. 240.

Besprechungen:

D. M. Smith, Visual Lines for Spectrum Analysis. S. 241.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1929. S. 242.

Berichtigung. S. 248.

Personalien. S. 248.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die Grundbegriffe der analytischen Mechanik als Grundlage der Quanten- und Wellenmechanik[1]).

Von Philipp Frank.

Inhaltsverzeichnis.

1. Einleitung.
2. Einführung der Klammerausdrücke.
3. Integrale und Uhrenausdrücke.
4. Vollständige Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
5. Vollständige Systeme und Funktionengruppen.
6. Rechenregeln für das Operieren mit Klammerausdrücken.
7. Polargruppen und ausgezeichnete Funktionen.
8. Kanonische Gestalt einer Gruppe und kanonische Transformationen.
9. Involutionssysteme.
10. Kanonische Form der Gruppe der Integrale eines mechanischen Systems.
11. Das Integrationsproblem vom Standpunkt der Gruppenauffassung.
12. Darstellung der Bewegungsgleichungen durch Klammerausdrücke allein.
13. Analogie zur Quantenmechanik.
14. Volles Involutionssystem und Wellenfunktion.
15. Hamilton-Jacobische Integrationsmethode.
16. Separation der Veränderlichen.
17. Wellen und Bahnkurven.
18. Die Schrödingerschen Wellen.
19. Die vollständige Figur von Wellenflächen und Bahnkurven.
20. Auffassung der vollständigen Figur als „Punktwolke".
21. Punktwolke und Undulationstheorie.
22. Wann definiert eine einzelne Bahnkurve eine vollständige Figur?
23. Der mehrdimensionale harmonische Oszillator als Beispiel zu Nr. 22.

1) Der folgende Bericht ist die erweiterte Wiedergabe eines Referates auf dem VI. Kongreß der russischen Physiker in Nischnij-Nowgorod am 10. August 1928.

1. Einleitung.

Wir wissen heute, daß die klassische Mechanik nicht allgemeingültige Naturgesetze enthält, sondern nur ein mathematisches Schema, mit dessen Hilfe sich gewisse Gruppen von Erscheinungen mit mehr oder weniger guter Annäherung beschreiben lassen. Für Erscheinungen, bei denen dieses Schema nicht ausreicht, hat man seit jeher gesucht, ein neues durch „Verallgemeinerung" der Ansätze der klassischen Mechanik zu finden. „Verallgemeinerung" ist aber ein unendlich vieldeutiges Verfahren; es kommt darauf an zu wissen, welche Bestandteile des alten Schema als wesentlich beizubehalten sind und welche nicht. Und je nach der Wahl dieser Bestandteile ergeben sich verschiedene „Verallgemeinerungen". Wir wollen vielleicht drei Arten aufzählen.

Zuerst hielt man das Schema des Kraftgesetzes: Kraft = Masse × Beschleunigung für das Wesentliche an der Mechanik und suchte die Verallgemeinerung in immer komplizierteren Funktionen für die Abhängigkeit der Kraft von Lage und Geschwindigkeit, immer komplizierteren Annahmen über die Verteilung der Massen.

Dieser Standpunkt entspricht dem, was man früher als „mechanistische Naturauffassung" bezeichnete, und was man aus Gewohnheit und noch mehr unter dem bewußten und unbewußten Einfluß veralteter metaphysischer Theorien und Triebe für das allein den Erkenntnistrieb befriedigende Schema hielt. Diese Versuche sind eigentlich schon an der Unmöglichkeit gescheitert, die elektromagnetischen Feldgleichungen ungezwungen in dieses Schema zu pressen. Die Annahmen über Kräfte und Massenverteilungen wurden bald so kompliziert, daß man die Versuche aufgab. Es wird oft nicht beachtet, daß diese Kompliziertheit nicht nur aus Gründen der „Bequemlichkeit" zum Ablassen von diesem Wege zwang, sondern daß nur bei einfachen Annahmen über die Kräfte die Newtonsche Mechanik überhaupt etwas über die Natur aussagt. Wenn sie mehr sein soll als eine bloße mathematische Form, in die sich schließlich alles zwängen ließe, muß der Newtonsche Ansatz lauten: „die Bewegungen lassen sich durch einfache Annahmen über die Kräfte nach dem Schema Kraft = Masse × Beschleunigung darstellen".

Die zweite Art der Verallgemeinerung ist die relativistische Mechanik. Hier verzichtete man überhaupt auf die Darstellung des elektromagnetischen Feldes durch Verallgemeinerung der Newtonschen Gesetze, wollte aber wenigstens die Bewegungen der Massen im Felde nach Analogie der klassischen Mechanik verstehen. Man gab das Newtonsche Schema auf, man versuchte nicht mehr, die Beschleunigungen der Massen in einfacher Weise als Funktion der gegenseitigen Lage der Körper darzustellen, man behielt vielmehr von der Newtonschen Mechanik als den wesentlichen Bestandteil das Hamiltonsche Variationsprinzip bei, und setzte nur unter das Integralzeichen anstatt der klassischen Hamiltonschen Funktion eine allgemeinere Größe, die invariant gegenüber der Gruppe der Lorentztransformationen ist, weil diesen gegenüber auch die schon bekannten Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen invariant waren. Dadurch spielten im Integranden Raum- und Zeitkoordinaten eine ähnliche Rolle, und man erhielt durch denselben Formalismus wie in der klassischen Mechanik durch Nullsetzen der ersten Variation neue Bewegungsgleichungen. Ich übergehe die ganz ähnliche Verallgemeinerung, die in der allgemeinen Relativitätstheorie stattfand, und gehe davon aus, daß auch die relativistische Mechanik nicht imstande war, die Vorgänge im Atom, die sich in der Erscheinung der Linienspektren äußerten, darzustellen.

Man gelangte nach mehreren tastenden Versuchen zu einer dritten Verallgemeinerung des Newtonschen Schemas, der Quantenmechanik, wie sie in den Arbeiten von Heisenberg, Born, Jordan, Schrödinger, Dirac u. a. in den letzten Jahren entwickelt wurde. Man sah jetzt an der klassischen Mechanik gerade das als wesentlich an, was die meisten Physiker eigentlich nur für eine mathematische Spielerei gehalten hatten, nämlich die Darstellung der Mechanik durch die Poissonschen Klammerausdrücke und durch die Theorie der Berührungstransformationen. Die Begriffe Masse und Kraft haben ihre Bedeutung verloren, und nur jene abstrakte Gestalt der klassischen Mechanik, wo sich alles durch die abstrakten gruppentheoretischen Begriffe ausdrückt, eignet sich zur Verallgemeinerung. Wenn wir daher jetzt die klassische Mechanik rückwärts vom Standpunkt der Quantenmechanik betrachten, ergibt sich eine ganz andere Verteilung der Aufmerksamkeit zwischen den für physikalisch wichtig und unwichtig gehaltenen Teilen. So wie wir vom Standpunkt der relativistischen Mechanik plötzlich an der klassischen Mechanik neue Gesichtspunkte bemerkten, daß z. B. auch dort Raum- und Zeitkoordinaten als gleichberechtigt betrachtet werden können und dann bei Bildung der Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip sich ebenso wie in der Relativitätsmechanik sich Impuls- und Energiesätze als Komponenten einer und derselben Vektorgleichung ergaben, so sieht man auch rückwärts vom Standpunkt der Quantenmechanik, daß viele Sätze derselben in der klassischen Mechanik formal schon vorgebildet waren, ohne daß man dieser Form eine Wichtigkeit beimaß.

Wir wollen nun im folgenden eine Darstellung der klassischen Mechanik von diesem Standpunkt aus geben, so daß in ihr diejenigen Begriffsbildungen und Sätze am stärksten hervortreten werden, die sich zum Zwecke des Übergangs zur Quantenmechanik als die wesentlichen erwiesen haben. Wir werden zu diesem Zweck von einer mathematischen Theorie viel Gebrauch machen, die bisher explizit in den Darstellungen noch wenig benutzt wurde, nämlich der von S. Lie entwickelten Theorie der Funktionengruppen[1]).

2. Einführung der Klammerausdrücke.

Jedes mechanische System ist nach der klassischen Mechanik dadurch gekennzeichnet, daß seine Hamiltonsche Funktion H in ihrer Abhängigkeit von dem Zustand des Systems gegeben ist. Dieser Zustand ist, wenn wir ein System

1) Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen. III. Bd., Kristiania und Leipzig 1922. S. 32ff. (Die betreffende Arbeit stammt aus dem Jahre 1873.)

von n Freiheitsgraden vor uns haben, durch Angabe der n generalisierten Koordinaten $q_1, q_2 \ldots q_n$ und der n generalisierten Impulskomponenten $p_1, p_2 \ldots p_n$ bestimmt. Jede Funktion der $2n$ Größen $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ heißt eine Zustandsfunktion des Systems. Die zeitliche Änderung der Zustandsgrößen bei der Bewegung des Systems ist durch die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen bestimmt, also durch

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \ldots n). \quad (1)$$

Dann folgt für die zeitliche Änderung einer beliebigen Zustandsfunktion f aus

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) \quad (2)$$

und Einsetzen von (1), wenn wir den Poissonschen Klammerausdruck zweier Zustandsfunktionen f und g durch

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right) \quad (3)$$

definieren, die einfache Formel

$$\frac{df}{dt} = (H, f). \quad (4)$$

Sie enthält als Spezialfälle, wenn wir als Zustandsfunktion f die Zustandsgrößen q_j, p_j selbst wählen, die Bewegungsgleichungen (1), die sich dann in der Form

$$\frac{dq_j}{dt} = (H, q_j), \quad \frac{dp_j}{dt} = (H, p_j) \quad (j = 1, 2 \ldots n) \quad (5)$$

schreiben lassen.

Wenn der Klammerausdruck zweier Zustandsfunktionen f und g verschwindet, so sagt man: sie sind „involutorisch" oder „in Involution zueinander"; ist ihr Klammerausdruck gleich 1, so nennt man sie „kanonisch konjugiert" zueinander, also

$$\begin{aligned} (f, g) &= 0: \quad f \text{ und } g \text{ in Involution} \\ (f, g) &= 1: \quad f \text{ und } g \text{ kanonisch konjugiert.} \end{aligned} \quad (6)$$

3. Integrale und Uhrenausdrücke.

Wenn eine Zustandsfunktion f während der ganzen Bewegung des Systems ihren Wert mit der Zeit nicht ändert, nennen wir sie ein Integral[1]) des Systems. Aus (4) folgt, daß f dann und nur dann ein Integral des Systems ist, wenn

$$(H, f) = 0 \quad (7)$$

gilt, also f in Involution zur Hamiltonschen Funktion H liegt. Da H nach der Definition (3) zu sich selbst involutorisch ist, so ist H selbst ein Integral, das man in der Mechanik das Energieintegral nennt. Wenn eine Zustandsfunktion mit der Zeit sich so ändert, daß ihre Änderung uns die verflossene Zeit selbst gibt, so kann die Kenntnis von f zur Konstruktion einer Uhr verwendet werden; wir nennen daher f einen „Uhrenausdruck". Dann muß $\frac{df}{dt} = 1$ sein und daher nach (4):

$$(H, f) = 1. \quad (8)$$

Die Uhrenausdrücke sind also zu H kanonisch konjugiert.

Man kann sich nach der üblichen Art leicht eine Übersicht über die Anzahl der voneinander unabhängigen Integrale des Systems verschaffen. Die allgemeine Integration der $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung in (1) ergibt die $2n$ Zustandsgrößen q_j, p_j als Funktionen der Zeit t und von $2n$ willkürlichen Konstanten $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$. Dabei ist aber zu beachten, daß eine dieser Konstanten nur additiv zu t hinzutreten kann, weil in den Gleichungen t nicht explizit vorkommt, sondern nur dt. Wir können also die allgemeinen Lösungen so ansetzen, daß wir die Zustandsgrößen als Funktionen von $t - t_0$ und den $2n - 1$ willkürlichen Konstanten $c_1, c_2 \ldots c_{2n-1}$ ansehen, wobei t_0 auch eine willkürliche Konstante ist. Lösen wir die so erhaltenen $2n$ Gleichungen nach den $2n$ Größen $c_1, c_2 \ldots c_{2n-1}, t - t_0$ auf, so erhalten wir Beziehungen der Form

$$\begin{aligned} f_j(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) &= c^j \quad (j = 1, 2, \ldots 2n - 1) \\ f_{2n}(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) &= t - t_0. \end{aligned} \quad (9)$$

In den $f_1 \ldots f_{2n-1}$ haben wir dann $2n - 1$ unabhängige Integrale vor uns, und zwar alle solchen. Jedes andere läßt sich durch sie ausdrücken. Gleichzeitig haben wir in f_{2n} einen Uhrenausdruck gewonnen.

Nach (7) muß sich die Frage nach der Anzahl der unabhängigen Integrale auch so stellen lassen: wie viele Zustandsfunktionen gibt es, die zu einer gegebenen in Involution liegen? Wir wollen die Frage beantworten, indem wir sie als Spezialfall einer allgemeineren von S. Lie beantworteten Frage auffassen.

4. Vollständige Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zunächst kann man die zuletzt gestellte Frage dahin verallgemeinern, daß man an Stelle der

1) Oft verwendet man die Bezeichnung „Integral" in allgemeinerem Sinn und bezeichnet dann die hier Integrale genannten Zustandsfunktionen genauer als „zeitunabhängige Integrale".

einen Zustandsfunktion H deren r setzt und das Problem aufwirft: wie viele Zustandsfunktionen f gibt es, die zu r gegebenen $g_1, g_2 \ldots g_r$ in Involution sind? Die gesuchten f müssen offenbar die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$(g_1, f) = 0, \ (g_2, f) = 0, \ldots (g_r, f) = 0. \quad (10)$$

Es sind dies r linear homogene partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für f als Funktion der $2n$ Zustandsgrößen $q_1, \ldots q_n; p_1 \ldots p_n$. Wir betrachten zunächst ein beliebiges derartiges System. Wenn wir den Operator A_j durch

$$A_j(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{kj} \frac{\partial f}{\partial q_k} + a'_{kj} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \quad (11)$$

definieren, wobei die a_{kj}, a'_{kj} beliebige Zustandsfunktionen sind, hat das genannte allgemeine System die Gestalt:

$$A_j(f) = 0; \quad (j = 1, 2, \ldots r). \quad (12)$$

Dabei nehmen wir an, daß die r Gleichungen (12) voneinander linear unabhängig sind, d. h. daß keine durch Linearkombination der anderen erhalten werden kann, auch wenn wir Koeffizienten zulassen, die selbst Zustandsfunktionen sind. Es ist klar, daß die Gleichungen (12) um so weniger gemeinsame Lösungen haben, je größer ihre Zahl ist. Wenn $r = 2n$, so sieht man leicht, daß sie überhaupt keine gemeinsame Lösung haben, außer der trivialen $f =$ konstant. Denn in diesem Fall haben wir $2n$ gewöhnliche lineare homogene Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante in den $2n$ unbekannten Größen $\frac{\partial f}{\partial q_k}, \frac{\partial f}{\partial p_k}$ vor uns, woraus das Verschwinden dieser Größen, also die Konstanz von f folgt. Ist aber $r < 2n$, so läßt sich zeigen, daß die Anzahl der gemeinsamen Lösungen niemals größer als $2n - r$ sein kann.

Es ist zunächst klar, daß durch Anwendung des Operators A_k auf eine der Gl. (12) Ausdrücke der Form $A_k(A_j(f))$ hervorgehen, die auch die zweiten partiellen Ableitungen von f nach den Zustandsgrößen enthalten. Bildet man aber die Kombinationen der Gestalt $A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f))$, so sieht man leicht durch Ausrechnen nach der Definition (11), daß sich die zweiten Ableitungen wegheben und wieder Ausdrücke entstehen, die linear homogen in den $\frac{\partial f}{\partial q_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j}$, sind, also genau von der Gestalt der $A_j(f)$ selbst. Es ist ferner klar, daß die gemeinsamen Lösungen des Gleichungssystems der r Gleichungen (12) auch Lösungen der ihnen ganz gleichgestalteten Gleichungen

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = 0, \quad j,k = 1, 2 \ldots r \quad (13)$$

sind. Wenn die Kombinationen der Gestalt (13) nicht linear abhängig von den r Ausdrücken $A_j(f)$ selbst sind, kann man die Gl. (13) einfach den r Gleichungen in (12) hinzufügen und enthält ein System mit genau denselben gemeinsamen Lösungen f, das aber aus mehr als r Gleichungen besteht. Damit nehmen wir an, daß keine Relationen der Gestalt

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = \sum_{s=1}^{r} C_s A_s(f) \quad (14)$$

bestehen. Man kann dieses Verfahren fortsetzen, indem man aus den linken Seiten der jetzt vermehrten Gleichungen (12) immer wieder Kombinationen der Gestalt (13) bildet. Schließlich wird man zu einem Gleichungssystem der Gestalt

$$A_j(f) = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots r, r+1 \ldots r+l) \quad (15)$$

geführt, bei dem jede Kombination (13) der linken Seiten sich in der Art (14) als Linearkombination der der $r + l$ Größen $A_j(f)$ selbst darstellen läßt. Wenn das erst für $r + l = 2n$ erreicht wäre, so gäbe es nach dem schon Gesagten überhaupt keine gemeinsamen Lösungen f der Gl. (15), also auch nicht der Gl. (12). Wir wollen daher annehmen, daß dieser „Sättigungszustand" des Systems (12) sich schon für $r + l < 2n$ erreichen läßt. Wir nennen das „gesättigte" System (15) ein vollständiges System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Man kann also die Integration jedes Systems (12) auf die eines vollständigen Systems zurückführen, da beide dieselben gemeinsamen Lösungen f besitzen. Wir wollen daher der Einfachheit halber annehmen, daß (12) selbst schon ein vollständiges System ist.

Von jedem vollständigen System läßt sich nun zeigen[1]), daß es genau $2n - r$ verschiedene Lösungen besitzt. D. h. es gibt $2n - r$ Zustandsfunktionen, zwischen denen keine Identität besteht, und die alle gemeinsame Lösungen von (12) sind. Ferner läßt sich jede gemeinsame Lösung von (12) durch die genannten $2n - r$ speziellen Lösungen identisch ausdrücken. Dabei sind hier unter Identitäten nicht nur linear-homogene, sondern allgemeine zu verstehen. Da jedes nicht vollständige System aus r Gleichungen sich zu einem vollständigen mit mehr als r Gleichungen ergänzen läßt, hat es offenbar weniger als $2n - r$ gemeinsame Lösungen.

1) Den Beweis, der hier nicht geführt ist, findet man z. B. in E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, übersetzt von H. Maser, Leipzig 1893. Dies ist überhaupt das empfehlenswerteste Lehrbuch dieses für den Physiker jetzt wichtig gewordenen Gebietes.

5. Vollständige Systeme und Funktionengruppen.

Wenn wir nun wieder zur Frage der gemeinsamen Lösungen von (10) zurückkehren, so können wir sie so formulieren: Wann bilden die r Gleichungen (10) ein vollständiges System? Sophus Lie hat gezeigt[1]), daß es dabei auf die Poissonschen Klammerausdrücke der $g_1 \ldots g_r$ ankommt. Er hat den fundamentalen Satz bewiesen: wenn die sämtlichen Klammerausdrücke der g_j sich identisch durch die Funktionen g_j selbst ausdrücken lassen, sind die Gl. (10) ein vollständiges System, haben also $2n - r$ verschiedene Lösungen. Die Voraussetzungen über die g_j lassen sich also so aussprechen: sie sollen voneinander unabhängig sein (nicht nur linear unabhängig) und ihre Klammerausdrücke sollen sich identisch in folgender Weise darstellen lassen:

$$(g_j, g_k) = f_{jk}(g_1, g_2 \ldots g_r) \quad (j, k = 1, 2 \ldots r). \tag{16}$$

Wenn wir den Beweis des Lieschen Satzes führen wollen, müssen wir von der nach der Schreibweise der vorigen Nummer geltenden Identität

$$A_j(f) = (g_j, f) \tag{17}$$

ausgehen.

Aus ihr folgt durch Ausrechnen und Berücksichtigung von (16) die Identität:

$$\begin{aligned} A_j(A_k(f)) - A_k(A_j(f)) &= ((g_j, g_k), f), \\ &= (f_{jk}, f). \end{aligned} \tag{18}$$

Wenn wir dann die in der nächsten Nummer Gl. (21) bewiesene Eigenschaft der Klammerausdrücke benutzen, ergibt sich daraus und aus (17):

$$\begin{aligned} A_j(A_k(f)) - A_k(A_j(f)) &= \frac{\partial f_{jk}}{\partial g_1} A_1(f) \\ &+ \frac{\partial f_{jk}}{\partial g_2} A_2(f) + \cdots \frac{\partial f_{jk}}{\partial g_r} A_r(f). \end{aligned} \tag{19}$$

Damit ist nach dem in Gl. (14) zusammengefaßten Kriterium und Gl. (17) das System (10) als ein vollständiges System erwiesen. Nach S. Lie sagt man von einem System von r Zustandsfunktionen $g_1, g_2 \ldots g_r$, die voneinander verschieden sind, deren Klammerausdrücke sich aber gemäß Gl. (16) durch $g_1 \ldots g_r$ selbst ausdrücken lassen, daß sie eine Funktionengruppe bilden. Zu dieser Gruppe rechnet man auch alle Zustandsfunktionen, die sich durch die $g_1 \ldots g_r$, die „Basis" der Gruppe ausdrücken lassen. Es gilt also der Satz:

„Wenn r Zustandsfunktionen eine Funktionengruppe bilden, so gibt es $2n - r$ Zustandsfunktionen f, die zu ihnen allen in Involution liegen. Ehe wir weiter gehen, sollen einige auch im folgenden wichtige Rechenregeln für Poissonsche Klammerausdrücke zusammengestellt werden.

6. Rechenregeln für das Operieren mit Klammerausdrücken.

Aus der Definition (3) für den Klammerausdruck der beiden Zustandsfunktionen f und g folgt sofort

$$(f, g) = -(g, f), \; (f, f) = 0. \tag{20}$$

Wenn F eine Funktion der Zustandsfunktionen $f_1, f_2 \ldots$, so ergibt sich aus (3) durch Einsetzen von $f = F(f_1, f_2 \ldots)$ und Ausführung der Differentiationen

$$(F, g) = \sum_h \frac{\partial F}{\partial f_h} (f_h, g). \tag{21}$$

Der Prozeß der Klammerbildung hat also den Charakter eines gewöhnlichen Differentiationsprozesses. Dasselbe sehen wir, wenn wir auch unter G eine Funktion der Zustandsfunktionen $g_1, g_2 \ldots$ verstehen und (F, G) bilden. Dann ergibt sich analog wie (21)

$$(F, G) = \sum_{j,h} \frac{\partial (F, G)}{\partial (f_j, g_h)} (f_j, g_h). \tag{22}$$

In der Summe kommt jede Zahlenkombination j, h nur einmal vor, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge. Die Koeffizienten in (22) sind die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (f_j, g_h)} = \frac{\partial F}{\partial f_j}\frac{\partial G}{\partial g_h} - \frac{\partial F}{\partial g_h}\frac{\partial G}{\partial f_j}. \tag{23}$$

Eine weitere Analogie zur Differentiation haben wir im Klammerausdruck eines Produktes fg mit einer dritten Zustandsfunktion h. Es ist nämlich

$$(fg, h) = f(g, h) + g(f, h). \tag{24}$$

Wenn wir schließlich den Klammerausdruck aus einem Klammerausdruck (f, g) und einer Zustandsfunktion h bilden, erhalten wir durch Ausrechnen nach (3) die Jacobische Identität

$$((f, g), h) + ((g, h), f) + ((h, f), g) = 0. \tag{25}$$

7. Polargruppen und ausgezeichnete Funktionen.

Man kann nach S. Lie weiter zeigen, daß die nach Nr. 5 zu den r Funktionen einer Gruppe in Involution liegenden $2n - r$ Funk-

1) S. Lie, Gesammelte Abhandlungen, III. Bd., S. 30ff.

tionen, die wir $f_1, f_2 \ldots f_{2n-r}$ nennen wollen, selbst eine Funktionengruppe bilden. Man nennt sie die Polargruppe der ursprünglichen Gruppe. In diesem Sinne bilden die $2n-1$ Integrale unseres mechanischen Systems, da sie nach (7) alle zu H in Involution liegen, eine Funktionengruppe, die Polargruppe von H. Als Spezialfall ist jetzt der Satz aufzufassen, daß der Klammerausdruck (f_j, f_k) aus zwei Integralen selbst ein Integral der Bewegungsgleichungen (1) ist. Da nämlich die Integrale eine Gruppe bilden, läßt sich der Klammerausdruck (f_j, f_k) durch die Integrale $f_1 \ldots f_{2n-1}$ selbst ausdrücken, muß also selbst ein Integral sein.

Man kann jetzt auch die Frage aufwerfen, wann $2n-1$ Zustandsfunktionen $f_1, f_2 \ldots f_{2n-1}$ sich als Integrale eines mechanischen Systems auffassen lassen. Dann müßte nämlich nach (7) sich eine Zustandsfunktion H finden lassen, die zu allen f_j in Involution liegt, also den Gleichungen

$$(H, f_j) = 0, \quad (j = 1, 2 \ldots 2n-1) \tag{26}$$

genügt. Dazu müssen die Gl. (26) ein vollständiges System bilden. Das ist sicher dann und nur dann der Fall, wenn die $f_1, f_2 \ldots f_{2n-1}$ eine Funktionengruppe bilden. Zu $2n-1$ Zustandsfunktionen läßt sich also eine Hamiltonsche Funktion finden, zu der sie als Integrale der Bewegungsgleichungen gehören, wenn die $2n-1$ Zustandsfunktionen eine Gruppe bilden.

Wenn eine Funktion sowohl der ursprünglichen als der Polargruppe angehört, nennt man sie eine ausgezeichnete Funktion der ersteren. Sie muß dann zu allen Funktionen derselben in Involution liegen. Die Hamiltonsche Funktion H ist offenbar die einzige ausgezeichnete Funktion in der Gruppe der Integrale eines mechanischen Systems. Dadurch spielt das Energieintegral eine mathematisch wesentlich andere Rolle als alle anderen Integrale.

8. Kanonische Gestalt einer Gruppe und kanonische Transformationen.

Die Gesamtheit aller Zustandsfunktionen bildet offenbar auch eine Gruppe. Man kann als „Basis" derselben beliebige $2n$ voneinander unabhängige Zustandsfunktionen wählen. Man sagt ja von jeder Funktion, die sich durch die Funktionen der Basis ausdrücken läßt, daß sie zur Gruppe gehört. Am naheliegendsten ist es, als Basis für die Gruppe aller Zustandsfunktionen die $2n$ Zustandsgrößen $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n$ selbst zu wählen. Dann ist nach der Definition (3) des Klammerausdruckes jedes q_j zu dem entsprechenden p_j kanonisch konjugiert und je zwei andere Zustandsgrößen in Involution zueinander. Es gilt also

$$(p_j, p_k) = 0, \quad (q_j, q_k) = 0, \quad (p_j, q_k) = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq k \\ 1 \text{ für } j = k. \end{cases} \tag{27}$$

Wenn wir die Basisfunktionen einer Gruppe so in zwei Zeilen anordnen können, daß die Funktionen in derselben Zeile in Involution zueinander liegen, die übereinander stehenden aber kanonisch konjugiert sind, so sagt man, daß die betreffende Basis eine kanonische Gestalt der Gruppe ist. Die Gruppe aller (oder was dasselbe ist von $2n$) Zustandsfunktionen läßt also die folgende kanonische Darstellung zu:

$$\begin{matrix} p_1, & p_2 \ldots p_n \\ q_1, & q_2 \ldots q_n. \end{matrix} \tag{28}$$

Wenn wir neue $2n$ veränderliche $Q_1 \ldots Q_n$, $P_1 \ldots P_n$ durch die $2n$ unabhängigen Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n), \\ P_j &= P_j(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n) \quad (j = 1, 2 \ldots n) \end{aligned} \tag{29}$$

einführen, so müssen, damit die neuen Funktionen auch eine kanonische Darstellung der Gruppe aller Zustandsfunktionen von der Gestalt

$$\begin{matrix} P_1, & P_2 \ldots P_n \\ Q_1, & Q_2 \ldots Q_n \end{matrix} \tag{30}$$

bilden, offenbar die Beziehungen

$$(P_j, P_k) = 0, \ (Q_j, Q_k) = 0, \ (P_j, Q_k) = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq k \\ 1 \text{ für } j = k \end{cases} \tag{31}$$

bestehen. Man nennt dann die durch (29) dargestellte Transformation eine kanonische Transformation oder eine Berührungstransformation. Durch sie bleibt die kanonische Gestalt der Gruppe (28) erhalten. Es erhebt sich nun die Frage, inwiefern man beliebige Funktionengruppen in eine kanonische Gestalt bringen kann. Auch auf diese Frage hat S. Lie eine erschöpfende Antwort gegeben[1]).

Wenn etwa die r Zustandsfunktionen $f_1, f_2 \ldots f_r$ die Basis einer r-gliedrigen Funktionengruppe bilden, so kann man nach Lie r voneinander unabhängige Funktionen der $f_1 \ldots f_r$, also eine neue Basis derselben Gruppe finden, so daß diese neuen Funktionen, die wir in den Zustandsgrößen selbst ausgedrückt mit $P_1, P_n \ldots P_\alpha$; $Q_1, Q_2 \ldots Q_\beta$, $(\alpha + \beta = r)$ bezeichnen wollen, den Beziehungen (31) genügen. Wenn etwa $\beta = \alpha + s$, kann man sie auch in der äußerlichen Form einer kanonischen Gruppe

1) S. Lie, l. c. S. 42 ff.

schreiben, nämlich

$$\begin{matrix} P_1, P_n \dots P_\alpha \\ Q_1, Q_n \dots Q_\alpha, Q_{\alpha+1} \dots Q_{\alpha+s}, (\alpha + s = \beta) \end{matrix} \quad (32)$$

Man kann ferner nach Lie die Funktionen $P_1 \dots P_\alpha$, $Q_1 \dots Q_{\alpha+s}$ durch Hinzufügen von weiteren $2n - r = 2n - \alpha - \beta$ Funktionen $P_{\alpha+1} \dots P_n$, $Q_{\beta+1} \dots Q_n$ zu einer $2n$-gliedrigen Gruppe ergänzen, wobei die P_j, Q_j den Beziehungen (31) genügen. D. h. aber: man kann jede Gruppe $f_1, f_2 \dots f_r$, in ihre kanonische Gestalt (32) überführen und zwar durch eine Berührungstransformation (29), (31), die man an den $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ in $f_1, f_2 \dots f_r$ ausführt. Aus der Darstellung (32) ist ohne weiteres ersichtlich, daß unsere Gruppe genau $s = \beta - \alpha$ ausgezeichnete Funktionen $Q_{\alpha+1} \dots Q_{\alpha+s}$, d. h. solche, die zu allen Gliedern der Gruppe in Involution sind, enthält. Lie konnte zeigen, daß diese Anzahl in jeder Gestalt der Gruppe, die aus der kanonischen durch eine Berührungstransformation hervorgeht, dieselbe bleibt. Daraus folgerte er den wichtigen Satz, der uns aber hier weniger beschäftigt, daß zwei Funktionengruppen mit gleicher Gliederzahl r und gleicher Zahl s der ausgezeichneten Funktionen immer durch eine Berührungstransformation ineinander übergeführt werden können, da beide die gleiche kanonische Gestalt (32) annehmen.

9. Involutionssysteme.

Wenn von r Zustandsfunktionen $f_1 \dots f_r$ je zwei in Involution liegen, nennen wir die f_j ein r-gliedriges Involutionssystem. Bilden wir r unabhängige Funktionen der f_j, etwa $F_1, F_2 \dots F_r$, so kann man leicht zeigen, daß sie auch ein Involutionssystem sind. Wir brauchen bloß den Klammerausdruck (F_j, F_k) nach Gl. (22) durch die (f_j, f_k) auszudrücken. Wenn man also die Anzahl der in einer Gruppe enthaltenen Funktionen kennen will, die in Involution zueinander sind, braucht man nur die Gruppe in ihrer kanonischen Gestalt (32) zu betrachten. Da hier nur Funktionen in derselben Zeile oder solche in verschiedenen Zeilen, die nicht übereinander stehen, in Involution sind, kann ein Involutionssystem höchstens aus $\alpha + s = \beta$ Gliedern bestehen. Eine Gruppe aus r Gliedern mit s ausgezeichneten Funktionen enthält also Involutionssysteme bis zu $\alpha + s = \frac{r+s}{2}$ Gliedern. Da offenbar immer $\alpha + s \leqq n$, gibt es überhaupt nur Involutionssysteme von höchstens n Gliedern. Mehr als n Zustandsfunktionen können nie in Involution zueinander liegen. Eine Funktionengruppe, die aus einem n-gliedrigen Involutionssystem besteht, hat daher n ausgezeichnete Funktionen. Sie ist mit ihrer Polargruppe identisch. Denn es kann keine weitere $(n+1)$te Funktion geben, die zu allen n in Involution liegt.

Es mögen etwa die n Zustandsfunktionen f_1, $f_2 \dots f_n$ ein „volles" Involutionssystem bilden, wie wir von nun an ein n-gliedriges nennen wollen. Durch Nullsetzen der f_j erhalten wir n Gleichungen zwischen den $2n$ Zustandsgrößen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$. Ihre Auflösbarkeit vorausgesetzt, denken wir uns die Beziehungen $f_j = 0$ nach den n Größen $p_1 \dots p_n$ aufgelöst und erhalten n Beziehungen der Gestalt

$$p_j - \pi_j(q_1, q_2 \dots q_n) = 0 \quad (j = 1, 2 \dots n). \quad (33)$$

Man kann leicht zeigen, daß ihre linken Seiten auch ein Involutionssystem bilden wie in der ursprünglichen Gestalt. Durch Ausrechnen der Klammerausdrücke nach der Definition (3) erhalten wir

$$(p_j - \pi_j, p_k - \pi_k) = \frac{\partial \pi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q_j}. \quad (34)$$

Da die Ausdrücke in (33) ein Involutionssystem bilden, folgt aus (34), daß der lineare Differentialausdruck $\pi_1 dq_1 + \pi_2 dq_2 + \cdots \pi_n dq_n$ ein vollständiges Differential bildet, daß also eine Funktion S der $q_1 \dots q_n$ existiert, so daß

$$p_j = \pi_j(q_1 \dots q_n) = \frac{\partial S}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \dots n). \quad (35)$$

10. Kanonische Form der Gruppe der Integrale eines mechanischen Systems.

Da diese Gruppe aus $2n - 1$ Gliedern besteht, kann ihre kanonische Form gemäß (32) nur so aussehen, daß eine einzige Funktion ohne gegenüberstehende in der anderen Zeile ist. Da die Energie H die einzige ausgezeichnete Funktion der Gruppe ist, muß sie diese einzige alleinstehende sein. (An ihre Stelle kann höchstens eine Funktion von H allein treten.) Das (32) entsprechende Schema der Gruppe der Integrale muß also folgendermaßen aussehen:

$$\begin{matrix} H\, P_2 \dots P_n \\ Q_2 \dots Q_n \end{matrix} \quad (36)$$

Wollen wir die Gruppe (36) zur Gruppe aller Zustandsfunktionen ergänzen, muß nur noch eine Funktion links unten hinzugefügt werden, die zu H kanonisch konjugiert ist, zu allen anderen Integralen aber in Involution liegt. Diese fehlende Größe Q_1 ist aber offenbar nach Nr. 3 ein Uhrenausdruck, oder wenn man will, die Zeit selbst. Man kann also die Gruppe der Integrale eines mechanischen Systems in gewissem Sinn dadurch erhalten, daß man aus der Gruppe aller Funktionen einen Uhrenausdruck weg läßt.

11. Das Integrationsproblem vom Standpunkt der Gruppenauffassung.

Die Bewegungsgleichungen integrieren heißt nichts anderes als die $2n-1$ Integrale in (36) auffinden. Dieses Problem läßt sich aber so aussprechen: die Gruppe aller Zustandsfunktionen soll aus der einfachsten Gestalt (28) in eine solche Gestalt (30) gebracht werden, daß die kanonische Gestalt erhalten bleibt, also die Gl. (31) gelten und

$$H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = P_1 \qquad (37)$$

wird, weshalb die Gruppe die Gestalt (36) annimmt. Oder anders gesagt: es soll eine Berührungstransformation (29), (31) gefunden werden, die nach den Zustandsgrößen $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ aufgelöst und in $H(q_1 \dots p_n)$ eingesetzt, die Identität (37) erfüllt. Dann haben wir nämlich in den $P_2 \dots P_n, Q_2 \dots Q_n$, die ja alle zu H in Involution liegen, mit H zusammen $2n-1$ Integrale und in Q_1 einen Uhrenausdruck. Setzen wir

$$H = c_1,\ P_j = c_j,\ Q_j = c_{n+j-1}\ (j = 2, 3 \dots n),$$
$$Q_1 = t - t_0, \qquad (38)$$

so erhalten wir durch Auflösung nach den $2n$ Zustandsgrößen $q_1 \dots p_n$ diese als Funktion der Zeit t und der $2n$ willkürlichen Konstanten t_0, c_1, c_2, c_{2n-1}.

Man sieht aber leicht, daß die Integration auch schon durchgeführt werden kann, wenn die Berührungstransformation (29), (31) nicht die Identität (37), sondern die viel weniger fordernde Identität

$$H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = E(P_1, P_2 \dots P_n) \qquad (39)$$

befriedigt, wo E eine beliebige Funktion der $P_1 \dots P_n$ ist. Wir zeigen zunächst, daß unter der Annahme (39) die $P_1 \dots P_n$ in der Gruppengestalt (30) Integrale unseres mechanischen Systems sind.

Nach (21), (39) und (31) ist nämlich

$$(H, P_j) = (E, P_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial P_k} (P_k, P_j) = 0. \qquad (40)$$

Nach (7) sind daher die P_j Integrale, also während der Bewegung konstant; dies gilt daher auch für die

$$\omega_j = \frac{\partial E}{\partial P_j}\ (j = 1, 2 \dots n). \qquad (41)$$

Bilden wir hingegen (H, Q_j), so ergibt sich ebenfalls aus (21), (37), (31)

$$(H, Q_j) = (E, Q_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial P_k} (P_k, Q_j) = \frac{\partial E}{\partial P_j} = \omega_j. \qquad (42)$$

Nach (4) ist also

$$\frac{dQ_j}{dt} = \omega_j.\quad Q_j = \omega_j t + \beta_j, \qquad (43)$$

wo die β_j zusammen mit den P_j $2n$ willkürliche Integrationskonstanten sind. Durch Einsetzen von

$$P_j = \alpha_j,\quad Q_j = \omega_j t + \beta_j\quad (j = 1, 2 \dots n) \qquad (44)$$

in (29) und Auflösen nach den $2n$ Zustandsgrößen $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ erhalten wir diese als Funktionen von t und der $2n$ Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $\beta_1 \dots \beta_n$. Wir nennen ein System von kanonischen Veränderlichen Q_j, P_j, die gemäß (39) so beschaffen sind, daß sich H durch die P_j allein ausdrückt, dem mechanischen Problem „angepaßte" kanonische Veränderliche.

12. Darstellung der Bewegungsgleichungen durch Klammerausdrücke allein.

Wir denken uns nun die Transformationsgleichungen, durch welche die Q_j, P_j eingeführt werden, in der aufgelösten Form

$$q_j = q_j(Q_1 \dots Q_n, P_1 \dots P_n),$$
$$p_j = p_j(Q_1 \dots Q_n, P_1 \dots P_n)\ (j = 1, 2 \dots n). \qquad (45)$$

Da wir eine Berührungstransformation vor uns haben, gelten die Beziehungen

$$(q_j, q_k) = (p_j, p_k) = 0 \qquad (p_j, q_k) = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k. \end{cases} \qquad (46)$$

Unter den Klammerausdrücken (q_j, q_k) usw. sind dabei selbstverständlich die Ausdrücke

$$(q_j, q_k) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_l} \frac{\partial q_k}{\partial Q_l} - \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} \frac{\partial q_k}{\partial P_l} \right) \text{ usw.} \qquad (47)$$

zu verstehen. Um die Integration nach Nr. 11. durchzuführen, müssen die durch Gl. (45) eingeführten Q_j, P_j angepaßte Veränderliche sein, also muß aus (45) die Identität (39) folgen. Aus dieser folgt aber, wenn wir auf beiden Seiten die Klammerausdrücke mit q_j bzw. p_j bilden, wobei diese Ausdrücke nach (47) zu verstehen sind:

$$(H, q_j) = (E, q_j),\ (H, p_j) = (E, p_j)\ (j = 1, 2 \dots n). \qquad (48)$$

Diese Gleichungen bilden mit (46) zusammen ein System von partiellen Differentialgleichungen für die durch (45) eingeführten $2n$ Funktionen q_j, p_j der $2n$ Veränderlichen Q_j, P_j. Man sieht leicht, daß jede Lösung dieses Systems uns bereits zur allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen führt. Man muß dazu nur zeigen, daß aus (48) und (46) wieder die Identität (39) folgt. Denn in diesem Fall haben wir nach Nr. 11. in den Gl. (45) und (44) eine Lösung der Be-

wegungsgleichungen mit $2n$ willkürlichen Konstanten vor uns.

Wir müssen also nur zeigen, daß aus den Gl. (48) und (46) das Verschwinden der partiellen Ableitungen von H nach allen Q_j folgt. Denn das ist der Inhalt der Identität (39). Nun ist aber

$$\frac{\partial H}{\partial Q_l} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_l} \right) (l = 1, 2 \ldots n). \tag{49}$$

Aus (21) ergeben sich für die Klammerausdrücke in (48) die Formeln

$$(H, q_j) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} (q_k, q_j) + \frac{\partial H}{\partial p_k} (p_k, q_j) \right],$$
$$(H, p_j) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} (q_k, p_j) + \frac{\partial P}{\partial p_k} (p_k, p_j) \right]. \tag{50}$$

also wegen (46)

$$(H, q_j) = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (H, p_j) = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \ldots n). \tag{51}$$

Hingegen erhält man für die linken Seiten von (48) nach (47) die Ausdrücke:

$$(E, q_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial P_k} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}, \quad (E, p_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial P_k} \frac{\partial p_j}{\partial Q_k}$$
$$(j = 1, 2 \ldots n). \tag{52}$$

Aus (48), (51), (52) ergibt sich dann durch Einsetzen in (49)

$$\frac{\partial H}{\partial Q_l} = \sum_{k,j} \frac{\partial E}{\partial P_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_l} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} \right) \tag{53}$$
$$(l = 1, 2 \ldots n).$$

Führen wir die Symbole

$$[Q_l, Q_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_l} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \frac{\partial q_j}{\partial Q_l} \right),$$
$$[P_l, Q_k] = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_l} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \frac{\partial q_j}{\partial P_l} \right) \text{ usw.} \tag{54}$$

ein, so folgt aus (53)

$$\frac{\partial H}{\partial Q_l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial P_k} [Q_l, Q_k] \quad (l = 1, 2 \ldots n). \tag{55}$$

Während die Poissonschen Klammerausdrücke nach (47) aus je zwei Funktionen der $2n$ Zustandsgrößen $Q_1, Q_2 \ldots P_1, P_2 \ldots P_n$ gebildet sind, entstehen die Klammerausdrücke (54) aus $2n$ Zustandsfunktionen $q_1, q_2 \ldots p_1, p_2 \ldots p_n$ und je zwei Zustandsgrößen. Man nennt sie oft die Lagrangeschen Klammerausdrücke. Zwischen den beiden Arten von Klammerausdrücken bestehen gewisse Beziehungen, die wir hier nur ohne Beweis angeben, die man aber leicht durch Ausrechnen nach den Regeln in Nr. 6 prüfen kann. Es ist nämlich, wenn wir bei den Poissonschen Ausdrücken die Gl. (45) in der aufgelösten Form (29) heranziehen, die runden Klammern also durch (3) definieren

$$\sum_{j=1}^{n} (Q_j, Q_k) [Q_j, Q_l] = \begin{cases} 1 \text{ für } k = l \\ 0 \text{ für } k \neq l. \end{cases} \tag{56}$$

Dabei können an Stelle der Q_j, Q_k irgendwelche der Größen $Q_1 \ldots Q_n$, $P_1 \ldots P_n$ stehen. Bilden die Funktionen $Q_1 \ldots P_n$ der $q_1 \ldots p_n$ eine Berührungstransformation, gelten also für die Poissonschen Klammerausdrücke die Gl. (31), so folgen daraus wegen (56) für die Lagrangeschen Klammern dieselben Beziehungen, also

$$\left.\begin{aligned} [Q_j, Q_k] = [P_j P_k] = 0, \\ [P_j, Q_k] = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Dann folgt aber aus (55)

$$\frac{\partial H}{\partial Q_l} = 0 \quad (l = 1, 2 \ldots n). \tag{58}$$

Daraus folgt aber die Identität (39) und damit ist gezeigt, daß die Integration der Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sich zurückführen läßt auf die Integration des Systems von partiellen Differentialgleichungen (48), (46).

13. Analogie zur Quantenmechanik.

Schreiben wir die Gl. (46), (48) für ein mechanisches System von einem Freiheitsgrad auf, das sich durch die kanonischen Koordinaten q, p festlegen läßt. Dann haben wir eine Funktion $H(q, p)$ des Zustandes q, p gegeben, und es sind drei unbekannte Funktionen der beiden Veränderlichen Q, P zu suchen, nämlich $q(Q, P)$, $p(Q, P)$, $E(P)$, von denen die letztere, wie wir von vornherein wissen, nur von P allein abhängen kann. Zur Berechnung dieser drei Funktionen stehen uns die drei partiellen Differentialgleichungen

$$(H, q) = (E, q), \quad (H, p) = (E, p), \quad (p, q) = 1 \tag{59}$$

zur Verfügung.

Hier ist die vollständige Analogie zu den Grundgleichungen der Quantenmechanik, wie sie von Heisenberg aufgestellt wurden, klargelegt. Wir haben auch beim System von einem Freiheitsgrade nicht wie bei der gewöhnlichen Form der Bewegungsgleichungen, zwei Differentialgleichungen vor uns, sondern drei. Die letzte

entspricht der Quantenbedingung. Als unbekannt werden nicht die beiden Koordinaten q und p als Funktionen der Zeit angesehen, sondern q, p und E als Funktionen der beiden Veränderlichen Q und P. Das kommt darauf hinaus, daß nicht eine einzelne Bahnkurve, sondern das gesamte System der Bahnkurven auf einmal als Lösung erscheint. Die Abhängigkeit von Q entspricht nach (44) den verschiedenen Punkten einer Bahnkurve, die von P dem Übergang von einer Bahnkurve zur anderen. Den Funktionen q, p und E entsprechen in der Quantenmechanik Matrizen. Der Umstand, daß E nur von P allein abhängt, findet sich in der Quantenmechanik darin wieder, daß die E entsprechende Matrix eine Diagonalmatrix ist.

14. Volles Involutionssystem und Wellenfunktion.

Wir haben gezeigt, daß man mit Hilfe einer Berührungstransformation (45), (46), aus der die Identität (39) folgt, die also „angepaßte" kanonische Veränderliche einführt, ein System von n in Involution liegenden Integralen $P_1, P_2 \dots P_n$ finden kann, also ein „volles" Involutionssystem. Man kann nun auch leicht zeigen, daß auch umgekehrt die Kenntnis eines vollen Involutionssystems dazu genügt, um angepaßte kanonische Veränderliche durch eine Berührungstransformation einführen, also das Integrationsproblem lösen zu können. Es seien etwa

$$f_j(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n) = P_j, \quad (j = 1, 2 \dots n) \tag{60}$$

n in Involution liegende Integrale der Bewegungsgleichungen. Dabei sind die P_j Integrationskonstante. Lösen wir die Gl. (60) nach den $p_1 \dots p_n$ auf, so erhalten wir wie in den Gl. (33) die p_j als Funktionen der q_j und der Integrationskonstanten P_j. Dann gibt es nach Gl. (35) eine Funktion S der q_j und P_j, so daß

$$p_j = \pi_j(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n) = \frac{\partial S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n)}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \dots n) \tag{61}$$

Führen wir durch die Gleichungen

$$Q_j = \frac{\partial S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n)}{\partial P_j} \quad (j = 1, 2 \dots n) \tag{62}$$

noch die n Größen $Q_1 \dots Q_n$ ein, so bilden die $2n$ Gl. (61), (62) eine Berührungstransformation zwischen den q_j, p_j und den Q_j, P_j. Man kann nämlich zeigen, was hier nur ohne Beweis angeführt werden soll, daß aus den Gl. (61), (62) bei beliebiger Gestalt der Funktion S die Beziehungen (31) bzw. (46) folgen. Man sieht ferner leicht, daß die Q_j, P_j, die durch Gl. (61), (62) eingeführt wurden, angepaßte Veränderliche sind. Da nämlich nach (60) die P_j, als Funktion der q_j, p_j betrachtet, Integrale der Bewegungsgleichungen sind, gelten nach (7) die n Gleichungen

$$(H, P_j) = 0, \quad (j = 1, 2 \dots n), \tag{63}$$

wobei die Klammerausdrücke nach (3) zu verstehen sind. Wegen (21) ist nun

$$(H, P_j) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial Q_k}(Q_k, P_j) + \frac{\partial H}{\partial P_k}(P_k, P_j) \right] \tag{64}$$
$$(j = 1, 2 \dots n),$$

woraus nach (31)

$$(H, P_j) = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} \quad (j = 1, 2 \dots n, \tag{65}$$

folgt. Dann kann aber nach (63) H die Q_j nicht enthalten, es gilt die Identität (39), die Q_j, P_j sind angepaßte Veränderliche. Man kann also das Integrationsproblem auf das Suchen nach der Funktion $S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n)$ zurückführen. Man nennt sie die Wirkungsfunktion oder nach einer Deutung, von der bald die Rede sein wird, die „Wellenfunktion".

15. Hamilton-Jacobische Integrationsmethode.

Nach dem bisherigen kann man sofort eine partielle Differentialgleichung angeben, der die Wellenfunktion S als Funktion der $q_1 \dots q_n$ genügen muß. Durch Einsetzen von (61) in die Identität (39) erhalten wir nämlich die Bedingung, der S genügen muß, damit die durch die Berührungstransformation (61), (62) eingeführten Q_j, P_j angepaßte Veränderliche sind:

$$H\left(q_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = E(P_1, P_2 \dots P_n). \tag{66}$$

Dabei ist E eine unbekannte Funktion, von der wir nur wissen, daß sie nur von den P_j anhängt. Gl. (66) heißt die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung. Ist $S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n)$ irgendeine Lösung, die n unabhängige Integrationskonstante $P_1 \dots P_n$ enthält (man nennt eine solche Lösung eine vollständige), so erhält man aus (61), (62) in Verbindung mit (44) und (41) die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen, nämlich die $2n$ Größen $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ als Funktionen der Zeit t und der $2n$ willkürlichen Konstanten $\alpha_1 \dots \alpha_n$, $\beta_1 \dots \beta_n$. Man kann in dieser Lösung leicht die $n - 1$ Gleichungen, welche die geometrische Gestalt der „Bahnkurven" im n-dimensionalen Raum der $q_1 \dots q_n$ bestimmen, gesondert erhalten. Man wählt zu diesem Zwecke als eine der n Konstanten $P_1 \dots P_n$ die Energie selbst, man setzt also etwa $P_n = E$. Dann lautet die Hamilton-

Jacobische Gl. (66) einfach

$$H\left(q_1 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = P_n = E \quad (67)$$

und die Wellenfunktion S hängt von den n Konstanten $P_1 \dots P_{n-1}, E$ ab. Die Gl. (41), (44) lauten dann

$$\begin{aligned} &\omega_j = 0, (j = 1, 2 \dots n-1), \omega_n = 1, \\ &Q_j = \beta_j, (j = 1, 2 \dots n-1), \\ &Q_n = t + \beta_n = t - t_0 \end{aligned} \quad (68)$$

und infolgedessen die Gl. (62)

$$\frac{\partial S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}, E)}{\partial P_j} = \beta_j \quad (69)$$

$$(j = 1, 2 \dots n-1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t - t_0. \quad (70)$$

In der Gl. (69) haben wir dann die gesuchten $n-1$ Beziehungen zwischen den n Größen $q_1 \dots q_n$ vor uns, die eine Kurve im n-dimensionalen q-Raum definieren. Gl. (70) gibt uns dann einen Uhrenausdruck, also den zeitlichen Verlauf der Bewegung. In der Lösung der Hamilton-Jacobischen Gleichung (66) haben wir also ein Mittel vor uns, n in Involution liegende Integrale der Bewegungsgleichungen, also ein volles Involutionssystem von der Art (60) zu finden. Wir erhalten es aus (61) durch Berechnung der P_j als Funktion der q_j, p_j.

16. Separation der Veränderlichen.

Der einfachste Fall eines Involutionssystems der Gestalt (60) ist der, wo die f_j je nur eines von den q_j und das dazugehörige p_j enthalten, also von der Form

$$f_j(q_j, p_j) = P_j, \quad (j = 1, 2 \dots n) \quad (71)$$

sind. Man sieht leicht, daß für Funktionen dieser Form immer die Klammerausdrücke (f_j, f_k) nach (3) verschwinden. Wenn die Gl. (61) gerade dieses Involutionssystem darstellen sollen, kann p_j nur von q_j allein abhängen, also muß S aus einer Summe von Gliedern bestehen, von denen jedes nur eines der q_j enthält, also

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j(q_j). \quad (72)$$

Man kann also anfangs immer versuchen, ob es möglich ist, eine Lösung der Gl. (67) zu finden, die von der speziellen Form (72) ist. In diesem Fall ist es möglich, ein volles Involutionssystem der einfachen Form (71) zu finden. Man sagt dann: das Problem ist durch „Separation der Veränderlichen" integrierbar. Die Bedeutung dieser Methode besteht darin, daß in den Fällen ihrer Anwendbarkeit es Integrale von so einfacher Form (71) gibt, daß aus ihr die Eigenschaft, ein Involutionssystem zu bilden, unmittelbar zu sehen ist.

17. Wellen und Bahnkurven.

Wenn wir die Wirkungsfunktion S eines mechanischen Systems betrachten, das einen gegebenen Energiewert E hat, so hängt dieses S, das in den Gl. (69), (70) vorkommt, noch von $n-1$ willkürlichen Konstanten $P_1 \dots P_{n-1}$ ab. Wir haben also ∞^{n-1} Funktionen der Koordinaten $q_1 \dots q_n$ vor uns, oder wenn wir

$$S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}) = \tau - \tau_0 \quad (73)$$

setzen, bei konstantem $\tau - \tau_0$ eine Schar von ∞^{n-1} Flächen im n-dimensionalen q-Raum. Wir nennen sie die zu unserem mechanischen Problem gehörigen „Wellenflächen".

Wir denken uns zunächst die Konstante τ_0 so gewählt, daß für $\tau = 0$ die Fläche der Schar, die den Parameterwerten $P_1 \dots P_{n-1}$ entspricht, durch den Raumpunkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgeht. Dann folgt aus (73) $\tau_0 = -S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1 \dots P_{n-1})$ und die Schar (73) läßt sich in der Gestalt

$$S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1 \dots P_{n-1}) = \tau \quad (74)$$

schreiben. Wir können uns nun vorstellen, daß τ sich stetig ändert, während die $P_1 \dots P_{n-1}$ konstant bleiben. Dann ändern sich die einzelnen Flächen der Schar (74) auch stetig. Wenn wir etwa τ als eine fiktive Zeit auffassen, können wir in der stetigen Änderung der Wellenflächen mit τ eine Art Wellenfortpflanzung sehen. Wenn wir dann eine Wellenfläche betrachten, die zu einer bestimmten Zeit τ durch einen bestimmten Raumpunkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgeht, z. B. zur Zeit $\tau = 0$ durch $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$, so können wir die Parameter $P_1 \dots P_{n-1}$ so wählen, daß die Wellennormale dort zu dieser Zeit eine bestimmte Richtung hat. Eine Richtung im n-dimensionalen Raum ist ja durch das Verhältnis von n Größen, etwa $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n$ gegeben. Wir müssen nur die $P_1 \dots P_{n-1}$ so wählen, daß die Proportion

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} : \frac{\partial S}{\partial q_2} : \dots \frac{\partial S}{\partial q_n} = \lambda_1 : \lambda_2 : \dots \lambda_n \quad (75)$$

für $q_1 = q_1^{(0)}$, $q_2 = q_2^{(0)} \dots q_n = q_n^{(0)}$ besteht. Dann ist für die Flächennormale die gewünschte Richtung festgelegt. Die Proportion (75) entspricht aber gerade $n-1$ Gleichungen für die $n-1$ Größen $P_1 \dots P_{n-1}$. Die Schar (74) lautet also, wenn auch noch die Richtung der

Wellennormale im Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ vorgeschrieben ist:

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) = \tau, \qquad (76)$$

wenn $P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}$ die Lösungen der Gl. (75) sind. Für jedes τ ist dann nur mehr eine einzige Fläche vorhanden, wenn also τ alle reellen Werte stetig durchläuft, ein „Wellenzug". Wir betrachten nun auch die Wellenzüge, die mit dem in (76) beschriebenen gleichzeitig durch den Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgehen, deren Wellennormale aber nicht genau mit der seinigen zusammenfällt. Wir erhalten so eine Schar von Wellen, deren Fortpflanzungsrichtungen im Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ einen dünnen räumlichen Kegel mit dem Scheitel in diesem Punkt erfüllen. Man erhält ihre analytische Darstellung einfach dadurch, daß man in (76) an Stelle von $P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}$ etwas davon verschiedene Werte $P_1^{(0)} + \Delta P_1 \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}$ setzt:

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} + \Delta P_1 \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} + \Delta P_1 \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}) = \tau. \qquad (77)$$

Wir können uns nun die Frage vorlegen, ob alle diese Wellen, die für $\tau = 0$ durch den Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgehen, in irgendeinem anderen Zeitpunkt τ wieder alle in einem Punkt des q-Raumes zusammenkommen, und wo alle diese Punkte für jeden Zeitpunkt τ zu finden sind. Wir entwickeln zu diesem Zweck die linke Seite von (77) nach der Taylorschen Reihe und brechen nach dem ersten Glied ab. Wir erhalten

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} - \left(\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} \right)_0 \right] \Delta P_j = \tau, \qquad (78)$$

wobei

$$\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} = \frac{\partial S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)})}{\partial P_j^{(0)}},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} \right)_0 = \frac{\partial S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)})}{\partial P_j^{(0)}} \qquad (j = 1, 2 \dots n-1). \qquad (79)$$

Soll Gl. (78) für die ganze Wellenschar (77), also für alle Werte von $\Delta P_1 \dots \Delta P_{n-1}$ und bestimmte gemeinsame Werte der $q_1 \dots q_n$ und τ erfüllt sein, so müssen diese $q_1, q_2 \dots q_n$ und τ den Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} = \left(\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} \right)_0 \quad (j = 1, 2 \dots n-1) \qquad (80)$$

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) - S(q_1^{(0)}, \dots q_1^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) = \tau \qquad (81)$$

genügen. Vergleichen wir die Gl. (80) mit der Gl. (69), so sehen wir, daß sie die $n-1$ Gleichungen der Bahnkurven unseres mechanischen Problems sind. (Wir müssen nur die Konstanten auf der rechten Seite von Gl. (80) mit β_j und die Parameter der Wirkungsfunktion wieder mit P_j statt $P_j^{(0)}$ bezeichnen.) Da ferner (81) mit (76) übereinstimmt, können wir sagen: wenn wir der Wellenfortpflanzung Strahlen dadurch zuordnen, daß wir die Bewegung der Punkte verfolgen, in denen sich benachbarte Wellenzüge zu gleichen Zeiten τ schneiden, so ist die Wellenfortpflanzung längs des Strahls einfach die Bewegung längs der Bahnkurve des mechanischen Problems, wobei aber die Geschwindigkeit durch das Gesetz (76) der Wellenfortpflanzung, nicht durch die Geschwindigkeit des mechanischen Systems, die ja auch nur für einen einzigen Massepunkt definiert wäre, gegeben. Diese Definition des Strahls entspricht aber ganz der Art und Weise, wie man in der Optik die Strahlen auf Grund der Undulationstheorie findet. Denn wir haben ja nichts anders getan, als die Punkte verfolgt, in denen sich benachbarte Wellen mit gleicher Phase (das bedeutet bei uns: gleichen Werten von τ) schneiden.

Bei dieser Analogie zwischen mechanischen Systemen und Wellenlehre ist zweierlei zu beachten. Erstens ist die Wellenfunktion S, die in allen unseren Gleichungen auftritt, nicht nur von den Parametern P_j, sondern, wie aus Gl. (67), (69), (70) ersichtlich ist, auch noch von der Energie E abhängig. Es ist also eigentlich überall $S(q_1, q_2 \dots q_n, E, P_1 \dots P_{n-1})$ zu schreiben. D. h. jedem Energiewert des mechanischen Systems ist eine andere Wellenschar (74) zugeordnet. Zweitens, und das ist noch wichtiger, ist die Zeit τ, die wir in (73) eingeführt haben, nicht identisch mit der Zeit t, in der wir die Bewegung unseres mechanischen Systems verfolgen, sondern wir hatten τ nur eingeführt, um eine möglichst einfache wellentheoretische Interpretation der Wirkungsfunktion S zu geben.

Wenn wir uns nun eine andere wellentheoretische Deutung suchen, in der eine Wirkungsfunktion auftritt, die von der Energie E unabhängig ist und wo außerdem die Wellenfortpflanzung in der Zeit t des mechanischen Systems

beschrieben wird, gelangen wir zu den von Schrödinger in seiner Wellenmechanik jedem mechanischen System zugeordneten Wellen.

18. Die Schrödingerschen Wellen.

Wenn wir eine Funktion W der Argumente $q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}, E, t$ durch

$$W = S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}, E) - Et \quad (82)$$

definieren, so folgt mit Hilfe von Gl. (70) sofort, daß die Ableitung von W nach E verschwindet, also E in W nicht als Argument auftritt. Die Gleichung

$$W = S - Et = W_0 \quad (83)$$

definiert uns, wenn W_0 eine Konstante bedeutet, für jeden Wert von t eine Fläche im n-dimensionalen q-Raum, also einen Wellenzug samt seinem Fortpflanzungsgesetz in der Zeit t, in der unser mechanisches System beschrieben wird. Die durch Gl. (83) dargestellten Wellen sind die nach der Schrödingerschen Wellenmechanik unserem mechanischen System zugeordneten Wellen. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit u in irgendeinem Raumpunkt ist dann offenbar

$$u = \frac{dn}{dt}, \quad (84)$$

wenn n die Normale auf die Wellenfläche im betreffenden Punkt ist. Nun ist aber

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{dW}\frac{dW}{dt}. \quad (85)$$

Da aber

$$\frac{dW}{dn} = |\operatorname{grad} W|, \quad (86)$$

wobei die beiden vertikalen Striche den absoluten Betrag des eingeschlossenen Vektors bedeuten, ergibt sich aus (84), (85), (86), (83)

$$u = \frac{E}{|\operatorname{grad} W|} = \frac{E}{|\operatorname{grad} S|}. \quad (87)$$

Es sei beiläufig bemerkt, daß sich aus der Wellenvorstellung in Nr. 17 für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Zeitmaß τ nach (74)

$$\frac{dn}{d\tau} = \frac{dn}{dS}\frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{|\operatorname{grad} S|} \quad (88)$$

ergeben hätte. Der absolute Betrag von grad S in einem Punkt des q-Raumes läßt sich aber aus der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (67) berechnen. Wenn nämlich die kinetische Energie unseres Systems in den generalisierten Koordinaten q_j und Impulskomponenten p_j ausgedrückt die Gestalt

$$K = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk} p_j p_k \quad (89)$$

hat, wo die a_{jk} von den $q_1 \dots q_n$ allein abhängen, die potentielle Energie aber $\Phi(q_1 \dots q_n)$ lautet, so ist $H = K + \Phi$ und die Gl. (67) nimmt, wenn wir für die p_j wieder die Ableitungen von S nach den q_j einsetzen, die Gestalt

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_k} + \Phi(q_1 \dots q_n) = E \quad (90)$$

an. Andererseits hat der Gradient von S in unserem generalisierten Koordinatensystem die Komponenten $\frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}$. Sein absoluter Betrag lautet dann nach den Regeln zur Berechnung der vektoranalytischen Kovarianten in krummlinigen Koordinaten analog zu (89)

$$|\operatorname{grad} S|^2 = \sum_{j,k} a_{jk}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (90a)$$

Dann folgt aber aus Gl. (90)

$$|\operatorname{grad} S| = \sqrt{2(E - \Phi)} \quad (91)$$

und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u ergibt sich aus Gl. (87)

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E - \Phi)}}. \quad (92)$$

Betrachten wir von den durch (83) dargestellten Wellen nun diejenigen, die zur Zeit $t = 0$ durch den Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ des q-Raumes hindurchgehen, so müssen wir für irgendein Wertesystem der $P_1 \dots P_{n-1}$, E die Konstante $W_0 = S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1 \dots P_{n-1}, E)$ setzen und die Gl. (83) lautet analog zu (74)

$$S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_{n-1}, E) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1 \dots P_{n-1}, E) = Et. \quad (93)$$

Wenn wir nun auch die Richtung der Wellennormale in diesem Punkt vorschreiben, so lassen sich, wenn der Energiewert E vorgeschrieben ist, analog zu (75) die $P_1 \dots P_{n-1}$ bestimmen und wir erhalten für jeden Energiewert eine ganz bestimmte Welle, die analog zu (76) durch

$$S(q_1, \dots q_n, P_1^{(0)}, \dots P_{n-1}^{(0)}, E) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E) = Et \quad (94)$$

gegeben ist, wenn die $P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}$ eben die Werte sind, die der gewählten Richtung der Wellennormalen entsprechen. Wenn wir wieder eine Wellenschar betrachten, deren Fortpflanzungsrichtung in $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ einen kleinen Kegel erfüllt, so haben wir in (94) anstatt der $P_j^{(0)}$ die Werte $P_j^{(0)} + \Delta P_j$ zu setzen und wir

erhalten analog zu (77):

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} + \Delta P_1^{(0)}, \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}, E) - S(q_1^{(0)}, \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} + \Delta P_1, \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}, E) = E t. \quad (95)$$

Daraus folgt, ganz wie aus (77) die Gl. (78) bis (81) sich ergaben:

$$\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} = \left(\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}}\right)_0 = \beta_j \quad (j = 1, 2 \dots n-1) \quad (96)$$

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}) = E t. \quad (97)$$

Die Punkte, in denen sich benachbarte Wellen in gleicher Phase treffen, wo also im Sinne der Undulationstheorie die Wellen einander durch Interferenz verstärken, bewegen sich längs der durch die Gl. (69) gegebenen Bahnkurven des mechanischen Problems. Die Geschwindigkeit, mit der diese Punkte vorrücken, ist aber wegen (97) durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schrödingerschen Wellen (83), also durch Gl. (92) gegeben. Etwas anders ist das Ergebnis, wenn wir eine Wellenschar betrachten, in der die Einzelwellen sich nicht nur durch die Fortpflanzungsrichtung, sondern auch durch den Energiewert E des entsprechenden mechanischen Problems unterscheiden. Dann haben wir in Gl. (95) auch noch an Stelle von E den Wert $E_0 + \Delta E$ zu setzen, wo E_0 ein fester Wert und ΔE klein gegen E_0 ist. Die so beschriebene „Wellengruppe" wird dann durch

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} + \Delta P_1, \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}, E_0 + \Delta E) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} + \Delta P_1, \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}, E_0 + \Delta E) = (E_0 + \Delta E) t \quad (98)$$

dargestellt. Wir können Gl. (98) auch durch Taylorentwicklung in der Form

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)}, \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} - \left(\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}}\right)_0\right] \Delta P_j + \left[\frac{\partial S}{\partial E_0} - \left(\frac{\partial S}{\partial E_0}\right)_0\right] \Delta E = E_0 t + t \Delta E \quad (99)$$

schreiben. Fragen wir wieder, in welchen Zeitpunkten alle Wellen der Gruppe (99), die zur Zeit $t = 0$ sich im Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ trafen, sich wieder in irgendeinem Punkt treffen werden, so erhalten wir analog zu (80) zunächst durch Vergleichen der Koeffizienten von ΔP_j, ΔE die Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_j^{(0)}} = \left(\frac{\partial S}{\partial P_j^0}\right)_0 = \beta_j \quad (j = 1, 2 \dots n-1) \quad (100)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E_0} = t + \left(\frac{\partial S}{\partial E_0}\right)_0 = t - t_0. \quad (101)$$

Wir erhalten so nicht nur die Gl. (69), sondern auch Gl. (70) und ersehen daraus: die Punkte, in denen sich die Wellen der Gruppe (99) durch Interferenz wegen Übereinstimmung der Phase verstärken, wandern nicht nur längs der Bahnkurven (69) des mechanischen Problems, sondern auch mit der Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt mit den Koordinaten $q_1 \dots q_n$ bewegt, durch den die ganze Bewegung des mechanischen Systems sich darstellen läßt.

Man sieht aber leicht, daß aus den Gl. (100), (101) die Gültigkeit von (99) noch nicht folgt. Dazu ist vielmehr noch notwendig, daß (94) mit $E = E_0$ erfüllt ist. Da aber aus (100) und (101) allein sich schon die $q_1 \dots q_n$ als Funktionen von t berechnen lassen, wird im allgemeinen durch Einsetzen dieser Werte in (94) diese Gleichung nicht erfüllt sein. Es wird nicht $S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0) - E_0 t = S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0)$ sein, sondern etwas davon abweichend

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0) - E_0 t = S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)}, E_0) + \Delta S_0. \quad (102)$$

An Stelle von (98) betrachten wir dann die Wellengruppe

$$S(q_1 \dots q_n, P_1^{(0)} + \Delta P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}^{(1)}, E_0 + \Delta E_0) - S(q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}, P_1^{(0)} + \Delta P_1^{(0)} \dots P_{n-1}^{(0)} + \Delta P_{n-1}^{(0)}, E_0 + \Delta E_0) - \Delta S_0 = (E_0 + \Delta E) t \quad (103)$$

wo also ΔS_0 eine Größe ist, die nicht von den Parametern der Wellengruppe $\Delta P_1^{(0)} \dots \Delta P_{n-1}^{(0)}$ ΔE abhängt[1]). Die Wellengruppe (103) unterscheidet sich von der ursprünglichen (98) nur dadurch, daß die Wellen nicht mehr zur Zeit $t = 0$, sondern zu einer anderen Zeit durch den

1) Es ist zu beachten, daß ΔS_0 wohl für jeden Zeitpunkt t der Bewegung des darstellenden Punktes einen anderen Wert hat. Das bedeutet aber nur, daß jede solche Lage durch Interferenz einer anderen Wellengruppe entsteht. Bei der Betrachtung der Fortpflanzung der Wellen (102), (103) selbst, z. B. bei Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ist ΔS_0 als Konstante anzusehen.

Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgehen. Da dies aber für alle Mitglieder der Wellengruppe derselbe Moment ist, so ändert sich an der Phasendifferenz zu irgendeinem Zeitpunkt t nichts und die ganze Berechnung, die von (98) zu (100), (101) führte, kann genau mit Gl. (103) wiederholt werden, nur mit dem Unterschied, daß überall zur Konstanten $S(q_1^0 \dots q_1^{(0)}, P_1^{(0)} + \Delta P_1^{(0)} \dots E_0 + \Delta E)$ die Größe ΔS_0 hinzutritt, die aber bei den auftretenden Differentiationen nach den Parametern $P_j^{(0)}$, E_0 nichts ausmacht. Der darstellende Punkt des mechanischen Systems, dessen Bewegung durch (100), (101) gegeben ist, kann also nicht mehr als Ergebnis des Zusammenwirkens der Wellengruppe (98) angesehen werden, deren Mitglieder alle zur Zeit $t = 0$ durch einen Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgehen, sondern die Lage des darstellenden Punktes entsteht in jedem Zeitpunkt t durch Zusammenwirken (Interferenz) einer Wellengruppe (103), die in einem von t abhängigen Augenblick durch den Punkt $q_1^{(0)} \dots q_n^{(0)}$ hindurchgegangen ist.

19. Die vollständige Figur von Wellenflächen und Bahnkurven.

Wenn uns ein volles Involutionssystem der Gestalt (60) gegeben ist, so ist dadurch nach Nr. 14 eine Wellenfunktion $S(q_1 \dots q_n, P_1 \dots P_n)$ bestimmt. Wenn wir den P_j gemäß (44) konstante Werte $P = \alpha_j$ beilegen, wird S eine im ganzen q-Raume definierte Funktion der $q_1 \dots q_n$, die noch von n Parametern $\alpha_1 \dots \alpha_n$ abhängt. Durch

$$S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n) = \tau \qquad (104)$$

ist dann bei stetig veränderlichem τ eine Schar von Flächen im q-Raum, bestimmt, die nach unserer Deutung in Nr. 17 eine Schar von Wellenflächen unseres Problems ist. Wenn wir wieder als eines der Integrale, von denen wir ausgingen, das Energieintegral wählen, und etwa $\alpha_n = E$ setzen, so lassen sich aus der Wellenfunktion S nach (69) eine Schar von ∞^{n-1} Bahnkurven ableiten, die sich in unserer jetzigen Bezeichnung in der Form

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, 2 \dots n-1) \qquad (105)$$

darstellen lassen. Wenn wir ein beliebiges volles Involutionssystem haben, lassen sich die ∞^{n-1} Bahnkurven, die sich aus S ableiten lassen, nicht mehr in der Gestalt (105) schreiben, sondern nach (62), (44) in der etwas verwickelteren

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} - \beta_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} - \beta_2}{\omega_2} = \dots \frac{\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} - \beta_n}{\omega_n} \qquad (106)$$

wenn die Energie sich durch die $\alpha_1 \dots \alpha_n$ in der Gestalt $E(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ ausdrücken läßt und nach (41)

$$\omega_j = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, 2 \dots n). \qquad (107)$$

Jedenfalls sind auch hier der Wellenfunktion S durch die Gl. (106) ∞^{n-1} Bahnkurven zugeordnet[1]). Man nennt nun die ∞^1 Wellenflächen (104) zusammen mit den ihnen nach Gl. (105) oder (106) zugeordneten ∞^{n-1} Bahnkurven eine „vollständige Figur" von Wellenflächen und Bahnkurven. Dieser Begriff ist von C. Caratheodory für allgemeine Variationsprobleme geprägt worden. Da S von n Parametern $\alpha_1 \dots \alpha_n$ abhängt, gibt es ∞^n vollständige Figuren und infolgedessen im ganzen $\infty^{n-1} \cdot \infty^n = \infty^{2n-1}$ Bahnkurven. Die Gesamtheit aller Bahnkurven läßt sich also mit Hilfe eines vollständigen Involutionssystems, oder was auf dasselbe hinauskommt, mit Hilfe der Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (66) in vollständige Figuren von je ∞^{n-1} Bahnkurven ordnen. Wir fragen nun, in welcher Beziehung die Richtung der Bahnkurve zu den Wellenflächen steht. Die Richtung einer Bahnkurve ist durch den Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ gegeben. Dasselbe wird aber auch durch die Angabe des Impulsvektors mit den Komponenten $p_1 \dots p_n$ geleistet, denn aus den p_j lassen sich die q_j, wie aus (1), (89) und $H = K + \Phi$ folgt, nach der Regel

$$\dot{q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} p_l \quad (j = 1, 2 \dots n) \qquad (108)$$

berechnen. Man nennt oft die p_j die „kanonischen" Richtungskoordinaten. Nun ist die Richtung einer Bahnkurve im Punkt $q_1 \dots q_n$ durch die Gl. (61) gegeben. Wenn wir mit $dq_1 \dots dq_n$ ein Linienelement auf der Wellenfläche bezeichnen, so ist wegen $S = \text{konst.}$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j = 0. \qquad (109)$$

Daher besteht zwischen einem durch die gewöhnlichen Richtungskomponenten $dq_1 \dots dq_n$ dargestellten Linienelement auf der Wellenfläche und einem durch die kanonischen Richtungsgrößen $p_1 \dots p_n$ definierten Element der Bahnkurve nach (61) die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} p_j dq_j = 0 \qquad (110)$$

1) Denn die durch (106) dargestellten Kurven hängen nur von den $n-1$ Differenzen der n Parameter $\frac{\beta j}{\omega j}$ ab.

Man sagt dann in der Ausdrucksweise der Variationsrechnung: die Bahnkurve steht auf der Wellenfläche „transversal". Wenn die $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ solche Koordinaten sind, daß sich die lebendige Kraft in der Form

$$K = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{n} \dot{p}_j^2 \qquad (111)$$

schreibt, so werden nach (108) die $\dot{q}_j = \frac{1}{m} \dot{p}_j$, also die gewöhnlichen Richtungsgrößen $\dot{q}_j$ der kanonischen $\dot{p}_j$ proportional. Die „Transversalitätsbedingung" (110) geht dann über in die „Orthogonalitätsbedingung", die besagt, daß die Bahnkurve auf der Wellenfläche senkrecht steht. Im einfachsten Fall, wo die q_j kartesische Koordinaten des dreidimensionalen Raumes sind, besteht also die „vollständige Figur" aus ∞^1 Wellenflächen, die den Raum einfach überdecken und deren ∞^2 orthogonalen Trajektorien als Bahnkurven.

Allgemein: ein bestimmtes Wertesystem der $\alpha_1 \dots \alpha_n$ definiert eine bestimmte vollständige Figur; jedes Wertesystem der $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ eine Bahnkurve, die dieser Figur angehört.

20. Auffassung der vollständigen Figur als „Punktwolke".

Durch eine vollständige Figur, also analytisch gesprochen durch Angabe der Wellenfunktion $S(q_1 \dots q_n, \alpha_1 \dots \alpha_n)$ mit bestimmten Werten der α_j, ist nach Gl. (108), (61) in jedem Punkt des q-Raumes eine Geschwindigkeit mit den Komponenten $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ definiert. Es ist nämlich

$$\dot{q}_j = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} \frac{\partial S}{\partial q_l} \quad (j = 1, 2 \dots n). \qquad (112)$$

Wir stellen uns nun vor, daß der ganze q-Raum mit darstellenden Punkten von mechanischen Systemen erfüllt ist. Wenn wir den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum vor uns haben, bedeutet das einfach eine Erfüllung mit materiellen Punkten, oder wie L. de Broglie sagt, einer „Wolke von materiellen Punkten". Durch Gl. (112) ist dann eine Bewegung dieser Punktwolke definiert. Fassen wir sie als Bewegung einer raumerfüllenden kontinuierlichen Masse auf, so ist durch (112) eine stationäre Strömung dargestellt, da die Geschwindigkeit nur vom Ort $q_1 \dots q_n$ abhängt. Man spricht dann auch von Strömung eines „inkohärenten" Mediums, da die einzelnen Punkte der „Wolke" nicht in Wechselwirkung stehen.

Damit wir eine wirkliche Strömung vor uns haben, darf bei der Bewegung, die durch (112) dargestellt wird, die Anzahl der Teilchen im Volumelement sich nicht verändern, d. h. es muß die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik gelten. Wenn man mit $\sigma(q_1 \dots q_n)$ die Zahl der Teilchen in der Volumeinheit, also die räumliche Dichte bezeichnet, lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\sigma \dot{q}_j)}{\partial q_j} = 0, \qquad (113)$$

also nach (112)

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sigma a_{jl} \frac{\partial S}{\partial q_l} \right) = 0. \qquad (114)$$

Wenn die vollständige Figur, also S, gegeben ist, muß daher die Teilchendichte σ der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (114) genügen. Zu jeder vollständigen Figur gehören, wenn sie als Strömung gedeutet werden soll, nur ganz spezielle Dichten $\sigma(q_1 \dots q_n)$. In diesem Sinne ist eine vollständige Figur bzw. eine strömende Punktwolke durch die beiden Funktionen S und σ bestimmt, die den beiden partiellen Differentialgleichungen (90), (114) genügen.

21. Punktwolke und Undulationstheorie.

Wir haben bisher das Wort Welle nur im Sinne der geometrischen Optik gebraucht, d. h. nur als eine geometrische Darstellung für die Gesamtheit der Lichtstrahlen. Die Wellenfläche bestimmt die Lichtstrahlen als ihre orthogonalen bzw. allgemeiner „transversalen" Trajektorien. Dabei war von irgendeiner Periodizität, also auch Schwingungszahl keine Rede. In der Schrödingerschen Wellenmechanik werden aber diese Wellen als wirkliche Wellen im Sinne der Undulationstheorie des Lichtes angesehen. In Anlehnung an de Broglie wird die Phase der Welle durch die Größe W in Gl. (83) definiert. Die Größe ψ, die sich wellenförmig fortpflanzt, wird dann durch die Formel

$$\psi = A e^{\frac{i}{h} W t} = A(q_1 \dots q_n) e^{\frac{i}{h} S(q_1 \dots q_n)} e^{-\frac{i}{h} E t} \qquad (115)$$

dargestellt. Dabei ist h eine Konstante, die eingeführt werden muß, um den Exponenten der Exponentialfunktion zu einer dimensionslosen Größe zu machen. Sie wird mit der Planckschen Wirkungskonstante identifiziert. A ist die Amplitude der Welle. Die Frequenz ω ist mit E durch die Beziehung

$$E = \omega h \qquad (116)$$

verbunden. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u durch Gl. (87), (92) gegeben ist, erhalten

wir für die Wellenlänge λ

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi h}{|\operatorname{grad} S|} = \frac{2\pi h}{\sqrt{2(E-\Phi)}}. \quad (117)$$

Wenn durch (115) wirklich ein Wellenzug im Sinne der geometrischen Optik dargestellt werden soll, so muß er im Kleinen in einen ebenen Wellenzug übergehen. Oder genauer gesagt: in Raumgebieten von der Größenordnung der Wellenlänge dürfen A und grad S nur wenig veränderlich sein. Wir nehmen nun an, daß ψ der gewöhnlichen Wellengleichung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit u genügt, also

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \quad (118)$$

Wir fragen dann, welchen Beziehungen A und S genügen müssen, damit bei langsam veränderlichem A und S durch (115) eine Lösung von (118) dargestellt wird: Schon de Broglie und allgemeiner *A. Sömmerfeld*[1]) haben gezeigt, daß dann S die Wellenfunktion und $\sigma = A^2$ die Dichte einer Punktwolke im Sinne von Nr. 20 sein müssen. Wir schreiben zunächst (115) in der Form

$$\psi = \varphi(q_1 \dots q_n)\, e^{-i\omega t} \quad (119)$$

so daß

$$\varphi = A\, e^{\frac{i}{h}S} \quad (120)$$

Dann gilt für φ die durch Einsetzen von (119) in (118) erhaltene Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\omega^2}{u^2}\varphi = 0 \quad (121)$$

die man oft die „verkürzte" Wellengleichung oder die Differentialgleichung für die „zeitliche Amplitude" φ nennt. Unter „räumlicher" Amplitude versteht man dann die Ortsfunktion A, die offenbar die Deutung als Wellenamplitude nur bei langsam veränderlichem A und grad S zuläßt. Da die vektoranalytische Kovariante div grad φ sich in den allgemeinen Koordinaten $q_1 \dots q_n$ durch

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(a_{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right) \quad (122)$$

ausdrückt, erhält man aus (120) durch Einsetzen in (121) die folgende Differentialgleichung für φ:

$$\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(a_{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right) + \frac{\omega^2}{u^2}\varphi = 0. \quad (123)$$

Setzen wir in (123) für φ seinen Wert aus (120) und verwenden die Ausdrücke (90a) und (122) sowie den analogen

$$(\operatorname{grad} A, \operatorname{grad} S) = \sum_{j,k} a_{jk}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (124)$$

für die vektoranalytischen Kovarianten in allgemeinen Koordinaten, so erhalten wir für A und S die Differentialgleichung:

$$\left[\frac{i^2}{h^2}A\,|\operatorname{grad} S|^2 + A\frac{\omega^2}{u^2}\right] + \frac{i}{h}\left[2(\operatorname{grad} A, \operatorname{grad} S) + A\operatorname{div}\operatorname{grad} S\right] + \operatorname{div}\operatorname{grad} A = 0. \quad (125)$$

Die Glieder in der ersten eckigen Klammer sind für kurze Wellen (also große Frequenzen ω) wegen der langsamen Veränderlichkeit von A und grad S groß gegen alle übrigen Glieder. Sie müssen also für sich nahezu verschwinden. Daraus folgt wegen (116) und (117) als annähernd gültig:

$$|\operatorname{grad} S|^2 = \frac{E^2}{u^2} = 2(E-\Phi), \quad (126)$$

also die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung (90). Wegen der langsamen Veränderlichkeit von A und grad S im Bereich einer Wellenlänge müssen λ grad A und λ div grad S klein gegen A und grad S selbst sein. Daraus folgt aber wegen (117), daß die Glieder in der zweiten eckigen Klammer in Gl. (125) klein gegen die in der ersten, aber groß gegen das letzte Glied div grad A sind. Es muß daher auch

$$2A(\operatorname{grad} A, \operatorname{grad} S) + A^2\operatorname{div}\operatorname{grad} S = 0 \quad (127)$$

gelten. Diese Gleichung ist aber, wenn wir

$$\sigma = A^2 \quad (128)$$

setzen, wegen (122) und (124) mit Gl. (114) identisch. D. h. aber: für Wellenlängen, die so kurz sind, daß innerhalb eines Bereiches, in dem A und grad S noch als konstant anzusehen sind, sehr viele Wellenlängen fallen, ist der Wellenzug (115), der nichts anderes ist als die Darstellung eines Strahlenbündels (oder genauer: einer Strahlenkongruenz) im Sinne der geometrischen Optik auch eine näherungsweise Lösung der Wellengleichung (118) der Undulationsoptik. Eine „Punktwolke", wie sie durch (90), (114) dargestellt wird, kann also auch durch (115) dargestellt werden, wenn A die Amplitude und S die Wellenphase einer wirklichen Lösung der Grundgleichung (118) der Undulationstheorie im Grenzfalle von Wellen ist, die kurz gegen die Inhomogenitäten des Mediums sind, was auf den Fall hinausläuft, daß die Wellenoptik durch die geometrische Optik ersetzt werden kann. Die klassische Mechanik erscheint so im Sinne von de Broglie und Schrödinger als „geometrische Mechanik", als ein Grenzfall einer

1) In seinem Beitrag in Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II. Bd., S. 484 ff.

„Wellenmechanik". Die Welle geht im kurzwelligen Grenzfall in eine Punktwolke über, deren Dichte dem Quadrate der Amplitude nach (128) proportional ist.

22. Wann definiert eine einzelne Bahnkurve eine vollständige Figur?

Eine Wellenfunktion $S(q_1 \ldots q_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ definiert bei bestimmter Wahl der $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ eine bestimmte vollständige Figur im Sinne von Nr. 19, bei Veränderung der $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Gesamtheit aller vollständigen Figuren, welche die Gesamtheit aller Bahnkurven umfaßt. Deshalb kann man zu jeder Bahnkurve eine vollständige Figur finden, der sie angehört, und zwar im allgemeinen unendlich viele. Es lassen sich nämlich bei gegebener Wellenfunktion S die Konstanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ in den Gl. (61), (105) so bestimmen, daß diese Gleichungen eine bestimmte Bahnkurve darstellen. Da es aber unendlich viele Lösungen S der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (67) gibt, kann man jede Bahnkurve auf unendlich viele Arten als Angehörige einer vollständigen Figur ansehen. Diese Figur ist festgelegt, wenn die Funktion S und die Werte der α_j festgelegt sind. Die Werte der β_j legen dann nur mehr die einzelnen Bahnkurven innerhalb derselben Figur fest. Die Kenntnis der vollständigen Figur allein ermöglicht es bereits, die Impulskomponenten $p_1 \ldots p_n$ für die durch einen beliebigen Punkt $q_1 \ldots q_n$ einer Figur hindurchgehende Bahnkurve zu bestimmen, ohne daß die β_j bekannt sind. Nach Gl. (61) sind nämlich einfach die

$$p_j = \frac{\partial S(q_1 \ldots q_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \ldots n). \quad (129)$$

Wenn umgekehrt die p_j als Funktion der $q_1 \ldots q_n$ gegeben sind, d. h. für jeden Punkt des q-Raumes der Impuls der durch ihn gehenden Bahnkurve unserer Figur, so läßt sich das S, also die vollständige Figur festlegen, wenn nur die p_j solche Ortsfunktionen sind, daß $p_1 dq_1 + \cdots p_n dq_n$ ein vollständiges Differential ist. Denn in diesem Fall gibt es immer eine Funktion S, die den Gl. (129) genügt.

Es kann nun offenbar der Fall eintreten, daß durch eine einzige Bahnkurve die p_j als Funktion der $q_1 \ldots q_n$ im ganzen q-Raum bestimmt sind. Es seien nämlich n Integrale des Systems gegeben, also n Relationen der Form

$$f_j(q_1 \ldots p_n, p_1 \ldots p_n) = \alpha_j \quad (j = 1, 2 \ldots n) \quad (130)$$

denen alle Zustände q_j, p_j längs Bahnkurven genügen müssen. Diese Integrale sollen so beschaffen sein, daß bei festgelegten Werten der Integrationskonstanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ alle Bahnkurven die den Relationen (130) mit den gegebenen Werten der α_j genügen, innerhalb eines endlichen Gebietes des q-Raumes verlaufen. Jede Bahnkurve soll ferner die Eigenschaft haben, daß sie mit der Zeit jedem Punkt des q-Raumes innerhalb des genannten Gebietes beliebig nahekommt. Das bedeutet: jedes weitere zu den n Integralen (130) noch hinzutretende Integral soll, wie Levi-Cività sich ausdrückt, nur ein „quantitatives" sein, kein „qualitatives". Unter einem der letzteren Art ist nämlich eines zu verstehen, daß auch bei einer kleinen Unbestimmtheit der Integrationskonstante (wenn also in $f_{n+1}(q_1 \ldots p_n) = \alpha_{n+1}$ die Größe α_{n+1} zwischen genügend engen Grenzen $\alpha_{n+1} - \Delta\alpha_{n+1}$ und $\alpha_{n+1} + \Delta\alpha_{n+1}$ schwankt), aus dem durch die n Integrale (130) bestimmten n-dimensionalen Gebiet des q-Raumes ein kleineres Gebiet herausgreift, in dem die Bahnkurven verlaufen müssen, wenn sie auch noch der Relation $f_{n+1}(q_1 \ldots p_n) = \alpha_{n+1}$ bei unscharfem α_{n+1} genügen müssen. Es ist klar, daß bei Existenz eines solchen „qualitativen" Integrals die Voraussetzung nicht erfüllt sein kann, daß die Bahnkurven jedem Punkt des durch Gl. (130) abgegrenzten Gebietes beliebig nahe kommen sollen.

Hingegen sollen die n Integrale (130) „qualitative" sein, d. h. durch Auflösung nach den $p_1 \ldots p_n$ sollen sich diese als solche Funktionen der $q_1 \ldots q_n$ ergeben, die an jedem Punkt des q-Raumes eindeutig oder endlich vieldeutig sind. Dann wird jede Bahnkurve, die in die Nähe eines Punktes des q-Raumes kommt, dort auch immer Werte der Impulskomponenten annehmen, die von denen nur wenig verschieden ist, die sie bei einem früheren Aufenthalt in der Nähe schon angenommen hatte. Wir verfolgen nun eine Bahnkurve, die den Integralen (130) genügt, längs ihres ganzen Verlaufes in dem von ihr erfüllten Teil des q-Raumes. In jedem Punkt $q_1 \ldots q_n$ wird dann längs der Kurve durch sie ein bestimmtes Wertesystem der Impulskomponenten $p_1 \ldots p_n$ bestimmt sein, und zwar dasjenige das sich aus der Gl. (130) durch Auflösung nach den $p_1 \ldots p_n$ ergibt. Es sei durch

$$p_j = \pi_j(q_1 \ldots q_n) \quad (131)$$

gegeben. Andererseits können wir aber die betrachtete Bahnkurve wie jede andere als einer vollständigen Figur angehörig betrachten. Dann gehört zu ihr eine Wellenfunktion S, aus der sich die Impulskomponenten p_j nach Gl. (129) berechnen. Diese p_j sind also einerseits im ganzen Teilgebiet des q-Raumes durch die Auflösungen (131) der Gl. (130) gegeben, andererseits an den Stellen, die von unserer Bahnkurve durchlaufen werden, durch Gl. (129). An allen diesen Stellen

müssen also die Beziehungen

$$p_j = \pi_j(q_1 \dots q_n) = \frac{\partial S}{\partial q_j} \qquad (132)$$

gelten. Da aber nach unserer Voraussetzung, daß die (130) qualitative oder wie man auch oft sagt, eindeutige Integrale sind, die p_j nur endlich mehrdeutige Funktionen der $q_1 \dots q_n$ sein können, also in benachbarten Punkten auch benachbarte Werte annehmen müssen, kann Gl. (132), wenn sie in allen von der Bahnkurve durchlaufenen Punkten besteht, auch in den anderen Punkten unseres n-dimensionalen Gebietes nicht versagen, da ja die Bahnkurve allen Punkten beliebig nahekommt. Daraus folgt aber, daß $\pi_1 dq_1 + \dots \pi_n dq_n$ ein vollständiges Differential ist. Daher ist durch die $\pi_1 \dots \pi_n$, also auch durch unsere einzige Bahnkurve, die Funktion S, und damit eine vollständige Figur festgelegt. Gleichzeitig folgt nach Nr. 9, daß die Integrale (130) ein volles Involutionssystem sein müssen.

Wir können also zusammenfassen: wenn die n Integrale (130) die einzigen qualitativen Integrale sind und jede Bahnkurve, die ihnen genügt, ein endliches Gebiet des durch (130) bestimmten n-dimensionalen q-Raumes in dem Sinn ausfüllt, daß sie jedem Punkt beliebig nahekommt, so ist durch jede Bahnkurve eine vollständige Figur bestimmt, und zwar in endlich mehrdeutiger Art, da sich die p_j durch Auflösung der Gl. (130) in endlich mehrdeutiger Art ergeben. Da jeder solchen Figur auch ein Wellenzug entspricht, so ist jeder Bahnkurve der beschriebenen Art auch in endlich mehrdeutiger Art ein Wellenzug im Sinne von Nr. 17 zugeordnet. Die n Integrale (130) selbst bilden also immer ein vollständiges Involutionssystem. Nur ein solches kann also ein n-dimensionales Gebiet definieren, das in der angegebenen Art von Bahnkurven erfüllt werden kann [1]).

23. Der mehrdimensionale harmonische Oszillator als Beispiel zu Nr. 22.

Als einfachstes Beispiel für den in Nr. 22 behandelten Fall betrachtet man gewöhnlich den mehrdimensionalen linearen Oszillator, bei dem die Perioden nach den verschiedenen Richtungen in irrationalen Verhältnissen stehen. Wir beschränken uns auf die Schwingung eines Massenpunktes der Masse 1 im dreidimensionalen Raum um den Koordinatenursprung als Gleichgewichtslage. Es seien q_1, q_2, q_3 kartesische Koordinaten, p_1, p_2, p_3 die entsprechenden Impulskomponenten.

1) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 82 ff., 1917.

Dann lautet die Hamiltonsche Funktion

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2), \qquad (133)$$

wo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Frequenzen bei Schwingungen in einer der drei Achsenrichtungen sind. Bezeichnen wir dann die Energie mit α_3, so lautet die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung hier nach (67)

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\left(p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2\right) = \alpha_3 \qquad (134)$$

und drei Integrale unseres mechanischen Systems, und zwar schon in der nach den p_j aufgelösten Form (131) lauten

$$p_j = \sqrt{2\alpha_j - \omega_j^2 q_j^2}, \quad (j = 1, 2),$$
$$p_3 = \sqrt{2(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) - \omega_3^2 q_3^2}. \qquad (135)$$

Wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel gehören zu jedem Punkt des q-Raumes acht Wertsysteme der p_1, p_2, p_3. Da jedes p_j nur von einem q_j abhängt, liegt hier der Fall der Separation der Veränderlichen von Nr. 16 vor, der Ausdruck $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$ ist offenbar ein vollständiges Differential und die Wellenfunktion ergibt sich durch bloße Quadratur als

$$S(q_1, q_2, q_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{j=1}^{2}\int\sqrt{2\alpha_j - \omega_j^2 q_j^2}\, dq_j + \int\sqrt{2(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) - \omega_3^2 q_3^2}. \qquad (136)$$

Wegen der acht möglichen Wertesysteme der p_j gibt es auch acht Ausdrücke für die Wellenfunktion. Da aber beim Umkehren der Vorzeichen aller p_j die Größe S selbst nur ihr Vorzeichen ändert, wobei sich keine andere vollständige Figur ergibt, werden durch die drei Integrale (135), die offenbar ein vollständiges Involutionssystem bilden, nur vier vollständige Figuren definiert. Außer den Integralen (135) besitzt aber unser System kein weiteres „qualitatives" Integral. Da nämlich für jeden möglichen Zustand des Systems die Ausdrücke unter den Quadratwurzeln in (135) positiv sein müssen, liegen die q_j zwischen festen Grenzen, nämlich

$$q_1 \text{ zwischen } -\sqrt{\frac{2\alpha_1}{\omega_1^2}} \text{ und } +\sqrt{\frac{2\alpha_1}{\omega_1^2}} \text{ usw.}$$

Alle Bahnkurven verlaufen aber innerhalb eines durch die drei Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ definierten quaderförmigen Teilgebietes des q-Raumes. Wenn wir von den Schwingungsfrequenzen voraussetzen, daß sie in irrationalem Verhältnis stehen, kommt jede Bahnkurve jedem Punkt des genannten Quaders beliebig nahe, sie füllt ihn in gewissem Sinn aus. Nach dem bisher Gesagten

definiert also jede einzelne Bahnkurve einen derartigen Quader, also auch bestimmte Systeme von Werten der p_i in jedem Punkte dieses Gebietes, also auch die Integrale (135). Wegen der schon besprochenen Mehrdeutigkeit gehören zu jeder Bahnkurve gerade vier vollständige Figuren, denen sie angehört, oder wie man auch sagen kann, vier Wellenzüge, denen sie im Sinne der Wellenmechanik zugeordnet werden kann. Solche Systeme, deren Bahnkurven also nur eine endliche Anzahl von Wellenzügen zugeordnet werden kann, haben in der Entwicklung der Quantentheorie als nichtentartete mehrfach periodische Systeme eine große Rolle gespielt. Wir sehen, daß sie auch vom Standpunkt der von der Wellenmechanik geforderten Zuordnung von Bahnkurven und Wellenzügen eine besonders ausgezeichnete Stellung einnehmen[1]).

1) Zusammenfassende Darstellungen der für die Quantenmechanik wichtigsten Teile der klassischen Mechanik findet man: im Handbuch der Physik (herausgeg. von Geiger und Scheel) im Bd. V (Beitrag von L. Nordheim und E. Fues) und im Bd. XX (Beitrag von A. Landé über Optik, Mechanik und Wellenmechanik), ferner in M. Born, Lehrbuch der Atommechanik und in der neuen Ausgabe von Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik (herausgeg. v. Ph. Frank und R. v. Mises) im Bd. II. (Beitrag von Ph. Frank über Analytische Mechanik.)

(Eingegangen 5. Februar 1929.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der Widerstand von Rohrkrümmern.

Von H. Lorenz.

Der Bewegungswiderstand bzw. das Druckgefälle von Flüssigkeiten beim Durchlaufen eines Rohrkrümmers (Figur) ist schon seit Weisbach Gegenstand zahlreicher Versuche gewesen. Deren Ergebnisse zeigen indessen eine so starke Streuung, daß sie sich nur schwer einer Kurve anpassen oder durch eine empirische Formel darstellen lassen. Nur soviel steht fest, daß beim Kreisquerschnitt mit einer Ablenkung von 90° für ein Verhältnis des Rohrhalbmessers zum mittleren Krümmungsradius von etwa 1:7 bis 1:8 der Bewegungswiderstand einen Kleinstwert besitzt.

1. Verläuft die Strömung in einem in sich geschlossenen Kreisring, also mit einer Umlenkung von 360°, so würde sich — abgesehen von der Wandreibung — eine Potentialbewegung nach dem Gesetze

$$u \cdot r = u_0 \cdot r_0 \qquad (1)$$

einstellen, wobei u, u_0 die Umfangsgeschwindigkeiten und r, r_0 zugehörige Bahnhalbmesser bedeuten. Diesem Bewegungszustand sucht sich die Strömung auch in Krümmern mit kleinerer Ablenkung $\varphi < 2\pi$ zu nähern, ohne ihn jedoch voll erreichen zu können. Dasselbe gilt auch für den radialen Druckanstieg infolge der Fliehbeschleunigung, die ohne mittlere Radialgeschwindigkeit für den geschlossenen Kreisring mit dem Raumgewichte γ und der Erdbeschleunigung g, durch

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u^2}{r} \qquad (2)$$

dargestellt wird und mit (1) durch Integration zwischen $r_2 > r_1$ den Druckzuwachs

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{g} u_0^2 r_0^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3} = \frac{\gamma}{2g}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) u_0^2 r_0^2 \qquad (2a)$$

von innen nach außen ergibt. Dafür kann man auch schreiben

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2g}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$= \frac{\gamma}{2g}(r_2 - r_1) u_0^2 \cdot \frac{(r_1 + r_2) r_0^2}{2 r_1^2 r_2^2}$$

oder mit der Annäherung

$$2 r_1^2 r_2^2 \approx (r_1 + r_2) r_0^3 \qquad (3)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u_0^2}{r_0}(r_2 - r_1). \qquad (2b)$$

Diesem nach der Innenseite des Ringes gerichteten Druckgefälle muß nun wegen des Haftens an der Wand in deren Nachbarschaft eine Strömung im Querschnitt folgen, die wegen des Rückstromes in der Mitte zu einem Doppelwirbel nach Fig. 1 führt, der von verschiedenen Beobachtern in der Tat festgestellt wurde. Die rechte Seite von (2b) stellt alsdann die Wirbelenergie der durch den Ring strömenden Masseneinheit dar, welche, durch innere Widerstände dauernd vernichtet, vermittels eines Druckgefälles in der Stromrichtung von dem Betrage (2b) aufrecht erhalten werden muß. Dabei kann mit hinreichender Annäherung u_0 als mittlere Stromgeschwindigkeit, r_0 als mittlerer Krüm-

mungshalbmesser der Ablenkung und $r_2 - r_1 = 2a$ als größte Breite des Krümmerquerschnittes in der Bewegungsebene angesehen werden. Umfaßt der Krümmer nur einen Bogen φ, so ist wegen des Überganges in die gerade Strömung beim Ein- und Austritt keine volle Ausbildung des Doppelwirbels über den ganzen Bogen φ und demgemäß auch nur ein Druckgefälle zur Wirbelbildung von

$$\Delta'_p = \frac{\varphi}{2\pi}(p_2 - p_1) = \frac{\gamma}{g}\frac{u_0^2 a}{r_0}\frac{\varphi}{\pi} \qquad (4)$$

zu erwarten.

2. Die durch (1) gegebene Geschwindigkeitsverteilung stellt sich naturgemäß ebenfalls nicht sofort am Eintrittsquerschnitt ein, bzw. geht nicht am Austritt in die gleichförmige gerade Strömung über. Alsdann ist das in der Zeiteinheit den Querschnitt F durchströmende Volumen

$$u_0 \cdot F = \int u\, dF = u \cdot r \int \frac{dF}{r} \qquad (5)$$

oder mit $r = r_0 + x$ angenähert

$$u_0 \cdot F = u \cdot r \int \frac{dF}{r_0 + x} = \frac{u \cdot r}{r_0}\int\left(1 - \frac{x}{r_0} + \frac{x^2}{r_0^2}\right) dF. \qquad (5a)$$

3. Ist nun r_0 der Krümmungsarm der Stromlinien durch den Querschnittsschwerpunkt, so folgt aus dem Trägheitshalbmesser k um die zur Bewegungsebene senkrechte Schwerachse

$$\int x\, dF = 0; \quad \int x^2 dF = k^2 \cdot F.$$

Damit erhalten wir aus (5a) mit $u = u_0$

$$r_0 = r\left(1 + \frac{k^2}{r_0^2}\right), \qquad (5b)$$

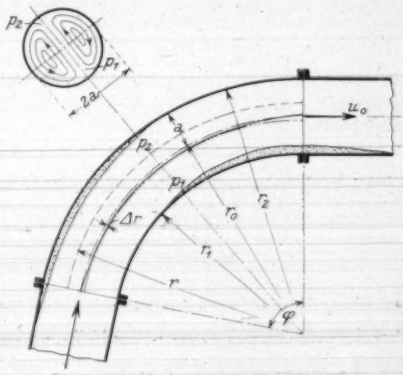
also eine Verschiebung der mittleren Stromlinie nach der Innenseite

$$r_0 - r = \frac{k^2 r}{r_0^2} \approx \frac{k^2}{r_0}, \qquad (6)$$

von der also bei einem Krümmerwinkel φ nur der Betrag

$$\Delta r = (r_0 - r)\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varphi}{2\pi}\frac{k^2}{r_0} \qquad (6a)$$

übrig bleibt. Dieser entspricht auf der Innenseite des Krümmers beim Eintritt eine Stromverengung, auf der Außenseite eine Erweiterung, während für den Austritt die Verhältnisse umgekehrt liegen, so daß man etwa in der Krümmermitte nach der Figur den Übergang der beiden Strömungsformen zu suchen hat. Jede Stromerweiterung ist aber mit einem Rückstrom am Rande innerhalb einer Wirbelschicht verbunden, die in der Tat deutlich am Eintritt an der Außenseite und von der Mitte hin zum Austritt an der Innenseite des Krümmers bemerkbar ist (Figur) und auch schon öfter von Beobachtern in Lichtbildern festgehalten wurde. Dieser äußeren Erweiterung bis zur Krümmermitte und inneren Erweiterung des Stromes von da ab entspricht auch das in der Mitte am stärksten ausgeprägte Druck-



gefälle (4) von außen nach innen, das nach den Krümmerenden zu stark abnimmt und in der geraden Strömung verschwindet. Die beiden einseitigen Stromerweiterungen in der Krümmerhälfte können wir nun zu einer Gemeinsamen des Gesamtstromes über den halben Krümmer $\varphi \cdot r_0 : 2$ zusammenfassen mit dem Erweiterungswinkel ϑ, der sich mit (6a) aus

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{2\Delta r}{r_0 \cdot \varphi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k^2}{r_0^2} \qquad (7)$$

ergibt, wobei eine Geschwindigkeitsänderung von u_0 auf u_1 in den Querschnitten

$$F_0 = \pi a^2 \text{ und } F_0 + 2a\Delta r$$
$$u_0 F_0 = u_1 (F_0 + 2a\Delta r)$$

oder

$$u_0 = u_1\left(1 + \frac{2\Delta r}{\pi a}\right) = u_1\left(1 + \frac{\varphi k^2}{\pi^2 a \cdot r_0}\right) \qquad (8)$$

stattfindet. Dieser Änderung entspricht aber nach der Theorie der Stromerweiterung eine Drucksteigerung[1])

$$p' - p'' = \frac{\gamma}{2g}(u_0^2 - u_1^2)\left(1 - \frac{4}{3}\operatorname{tg}\vartheta\right), \qquad (9)$$

deren mit $\operatorname{tg}\vartheta$ behafteter Anteil

$$\Delta''_p = \frac{2\gamma}{3g}\operatorname{tg}\vartheta\,(u_0^2 - u_1^2) \qquad (10)$$

den reinen Druckverlust durch die Stromerweiterung darstellt. Hierfür dürfen wir aber

1) Physik. Zeitschr. **30**, 77, 1929.

nach (8) auch schreiben

$$u_0^2 - u_1^2 = u_0^2 \frac{4\Delta r}{\pi a} = u_0^2 \frac{2\varphi k^2}{\pi^2 a r_0},$$

womit (10) unter Beachtung von (7) übergeht in

$$\Delta_p'' = \frac{u_0^2\gamma}{g} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\Delta r}{\pi a} \operatorname{tg}\vartheta = \frac{16}{3} \frac{u_0^2\gamma}{g} \frac{\Delta r^2}{\pi\varphi a r_0} \quad (10a)$$

und daher als klein zweiter Ordnung gegen den Druckabfall (4) vernachlässigt werden darf.

3. Zu dem hiernach noch übrig bleibenden Wirbelverlust (4) tritt schließlich noch das Druckgefälle zur Überwindung der turbulenten Wandreibung

$$\Delta_p''' = \frac{\varphi r_0}{a} \lambda \frac{a_0^2\gamma}{2g} \quad (11)$$

mit der Rauhigkeitsziffer λ. Addieren wir dies zu (4), so folgt der gesamte Druckverlust im Rohrkrümmer

$$\Delta p = \frac{\varphi}{\pi} \frac{u_0^2}{2g}\gamma\left(2\frac{a}{r_0} + \pi\lambda\frac{r_0}{a}\right) \quad (12)$$

mit einem Kleinstwert

$$\Delta p_0 = \frac{\varphi}{\pi}\frac{u_0^2\gamma}{2g}\sqrt{2\pi\lambda} \quad \text{für} \quad \frac{a}{r_0} = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}}. \quad (12a)$$

Setzen wir hierin für die Rauhigkeit entsprechend Gußeisenrohren $\lambda = 0{,}01$, so wird für den Kleinstwert von Δp_0

$$\frac{a}{r_0} = \sqrt{\frac{1{,}57}{100}} = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

in bester Übereinstimmung mit den Feststellungen von Brightmore und Davis[1]).

Schreiben wir mit der Abkürzung

$$2\frac{a}{r_0} + \pi\lambda\frac{r_0}{a} = \zeta, \quad (13)$$

an Stelle von (12)

$$\Delta p = \frac{\varphi}{\pi}\frac{\gamma u_0^2}{2g}\cdot\zeta, \quad (12b)$$

so ergibt sich mit $\lambda = 0{,}01$ für ζ die folgende Tabelle:

$\frac{r_0}{a} =$	1	2	3	4	6	8	10
$2\frac{a}{r_0} =$	2	1	0,667	0,500	0,333	0,250	0,206
$\pi\lambda\frac{r_0}{a} =$	0,03	0,063	0,094	0,125	0,188	0,250	0,314
$\zeta =$	2,03	1,063	0,761	0,625	0,521	0,500	0,514

1) Brightmore, Loss of pressure in water flowing through straight and curved pipes. Proc. Inst. Civ. Engineers, **169**, 315, 1907; Davis in Bemerkungen zu Schoder, Curve resistance in water pipes. Transact. Americ. Soc. Civ. Eng. **69**, 63 u. 100, 1909.

Für den meist gebrauchten Viertelkreiskrümmer oder Ellbogen wird alsdann mit $\varphi : \pi = 0{,}5$

$$\frac{\varphi\zeta}{\pi} = 1{,}01 \quad 0{,}531 \quad 0{,}380 \quad 0{,}313 \quad 0{,}260 \quad 0{,}250 \quad 0{,}257.$$

Auch diese Zahlenwerte liegen durchaus im Bereich der Beobachtungswerte, die sämtlich ein sehr starkes Ansteigen mit zunehmendem $a : r_0$ erkennen lassen und damit den überwiegenden Einfluß des Doppelwirbels im Querschnitt bestätigen.

(Eingegangen 19. Januar 1929.)

Über Fortpflanzung von elastischen Wellen in viskosen Medien.

Von B. Gutenberg.

In einer theoretischen Untersuchung kam K. Sezawa[1]) zu dem Ergebnis, daß elastische Wellen bei ihrer Fortpflanzung in viskosen Medien immer länger und flacher werden, und daß Unregelmäßigkeiten in der Wellenform immer mehr verschwinden. Aus den von Sezawa abgeleiteten allgemeinen Formeln läßt sich nichts über die Größe der Veränderung aussagen. Aus einer Reihe von Ergebnissen aus der Anwendung der Formeln auf spezielle Fälle schloß jedoch der Verf.[2]), daß das Gesetz für die Zunahme der Periode T mit der Distanz D für Planwellen im allgemeinen die Form habe

$$T = \sqrt{T_0^2 + CD} \qquad C = c\frac{\lambda' + 2\mu'}{\varrho V^3}$$

wo T_0 die Wellenperiode in kleinen Entfernungen ist und C eine Konstante (Dimension $\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2$), welche von der Wellenform, der Dichte ϱ und den Viskositätskoeffizienten λ' und μ' in dem betr. Medium und der Wellengeschwindigkeit V abhängt. Da C im allgemeinen klein ist, muß sich die Periodenänderung erst in größeren Distanzen bemerkbar machen, so daß sie zuerst bei geophysikalischen Erscheinungen auffiel und bei diesen, wie die folgenden Beispiele zeigen mögen, auch recht deutlich ausgeprägt ist. Es ist im übrigen damit zu rechnen, daß die Wellenlänge auch durch andere Vorgänge verändert wird.

1) K. Sezawa, Bull. Earthquake Research Institute Tokyo **3**, 43, 1927 und **4**, 107, 1928.

2) B. Gutenberg, Vortrag Naturforscherversammlung Hamburg 1928, Abh. 7 und Zeitschr. f. Geophys. **4**, 247, 1928. Ausführlichere Darstellung in B. Gutenberg, Handbuch der Geophysik, Bd. 4. (Im Druck.)

1. Seismische Bodenunruhe. Die ersten Beobachtungen über Vergrößerung der Wellenlänge bei der Fortpflanzung rühren wohl von F. Linke[1]) her, welcher feststellte, daß die seismische Bodenunruhe durch Brandung in Apia um so größere Perioden besitzt, je weiter das Sturmzentrum bzw. die Brandungsstelle entfernt ist. Das gleiche gilt für Eurasien, wo stets die kleinsten Perioden an den Westküsten, die größten in Zentralasien auftreten[2]). In der Nähe der Brandungsstelle beträgt die Wellenperiode im allgemeinen 2—4 Sekunden, sie steigt bei großen Entfernungen (rund 5000 km) bisweilen auf über 10 Sekunden.

2. Erdbeben. Hier gilt ganz analoges. Bei Nahbeben werden stets ganz kurze Wellen beobachtet (Größenordnung 1 Sekunde), die manchmal von längeren Wellen überlagert sind, mit wachsender Entfernung wachsen die Perioden und überschreiten in rund 5000 km Entfernung den Wert von 10 Sekunden. In noch größerer Entfernung heben sich dann gewisse Perioden hervor und zwar bei Oberflächenwellen bedingt durch das Gruppengeschwindigkeitsminimum[3]).

3. Künstliche Erschütterungen. Hier liegt eine ganze Reihe von Beobachtungen von O. Meißer[4]) vor, die alle Zunahme der Periode entsprechend unserer Formel ergeben. Bei einer Sprengung fand er etwa folgende Werte:

$D =$	0	100	200	300	400 m
$T =$	0.02	0.10	0.14	0.16	0.17 Sek.

4. Meereswellen. Es handelt sich hier um eine bekannte Erscheinung. Für die Wellenlänge der Dünung im Atlantischen Ozean am 25. Februar 1886 ergeben sich nach Krümmel z. B. folgende Werte für die Wellenlänge:

$D =$	1000	2000	3000	4000 Seemeilen
$L =$	(100)	260	360	420 m.

5. Schallausbreitung. Aufnahmen der Explosionswelle bei einer Sprengung durch F. Ritter[5]) zeigen deutlich, wie die Welle zwischen 500 und 2500 m Entfernung länger und regelmäßiger wurde. Weitere Beobachtungen, die hier relativ leicht anzustellen wären, scheinen zu fehlen. Vielleicht wird die Tatsache, daß Explosionen, Kanonendonner und ähnliche Erscheinungen in größerer Entfernung von der Schallquelle als tiefer Ton wahrgenommen werden, hierdurch mit erklärt.

Frankfurt a. M., 18. Februar 1929.

(Eingegangen 20. Februar 1929.)

1) F. Linke, Die Brandungsbewegungen des Erdbodens ..., Abh. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, N. F. 7, 1909.

2) B. Gutenberg, Untersuchungen über die Bodenunruhe ..., Veröff. d. Zentralbur. d. Int. Seismol. Assoc. Straßburg 1921.

3) Vgl. hierzu H. Jeffreys, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. London, Geophys. Supplem. 1, 286, 1925.

4) O. Meisser, Beiträge zu einer experimentellen Seismik, Veröff. Reichsanstalt f. Erdbebenforschung, Jena 1929, Heft 9.

5) F. Ritter, Deutsche Forschung, Heft 4, 43, 1928.

Antwort auf die Bemerkungen des Herrn Glitscher zu meiner Arbeit in der Physik. Zeitschr. 29, 295, 1928.

Von O. Martienssen.

Herr Glitscher[1]) sucht zu beweisen, daß die von mir in der Physik. Zeitschr. **29**, S. 295 gegebene Erklärung für die von mir erfundene Dämpfungseinrichtung unrichtig sei und daß die Dämpfung des Kompasses lediglich direkt durch den Druck gegen die Rosenachse erzeugt würde. Der Beweis des Herrn Glitscher ist fehlerhaft, wie sich schon aus der einfachen Überlegung ergibt, daß der Druck gegen eine Achse bei Vernachlässigung der Reibung an der Achse niemals die Drehung um diese Achse beeinflussen kann. Denn die Schwingungen, welche wir beim Kompaß beobachten, sind die Schwingungen um die Rosenachse, das heißt, die Schwingungen, die die Kompaßrose in ihrer Ebene ausführt.

In der Theorie des Herrn Glitscher ist die von ihm aufgestellte Formel 4 falsch. Die von mir aufgestellten Gleichungen 1 und 2, auf die sich Herr Glitscher bezieht, geben Beziehungen von Drehmomenten um die körperfesten, im Raum beweglichen Elevations- bzw. Rosenachsen. In diesen Gleichungen hat das Drehmoment $Pl\beta$ des Herrn Glitscher um die raumfeste aber körperbewegte Vertikale nichts zu suchen. Herr Glitscher müßte in der Gleichung 4 das Drehmoment um die Rosenachse einsetzen und nicht um die Vertikale. Dieses Drehmoment ist aber Null, so daß die für das ungedämpfte System geltenden Schwingungsgleichungen bestehen bleiben. Wenn Herr Glitscher die Bewegungsgleichungen für raumfeste Achsen aufstellen will, so hätten in diesen Gleichungen die Trägheitsmomente, die sich auf körperfeste Achsen beziehen, nichts zu tun, ebensowenig die Geschwindigkeiten $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$. Selbstredend

1) Diese Zeitschr. **29**, 566, 1928.

wäre es ein Trugschluß — Herr Glitscher zieht diesen an anderer Stelle — zu sagen, das Drehmoment um die Rosenachse hätte die praktisch identische Komponente $Pl \sin\beta \cos\beta$. Denn die Horizontalkomponente des Glitscherschen Drehmomentes $Pl \cos\beta$ hat um die Rosenachse β die die erste aufhebende Komponente — $Pl \cos\beta \sin\beta$.

Vollkommen unerfindlich ist ferner, wieso das in der Gleichung 6 des Herrn Glitscher rechtsstehende Glied $Pl\beta \frac{d\alpha}{dt}$ die an das nachgedrehte System abgegebene Energie sein soll, da in diese Gleichungen die Nachdrehung des Systems überhaupt nicht eingeht. Denn $\frac{d\alpha}{dt}$ ist die Drehgeschwindigkeit der Rose um ihre Achse, die ganz unabhängig davon besteht, ob ein nachgedrehtes System vorhanden ist oder nicht. Wenn die Gleichung 4 und damit die Gleichung 6 des Herrn Glitscher richtig wäre, so würde der Kreiselkompaß auch ohne nachgedrehtes System lediglich durch den Druck auf die Rosenachse eine Dämpfung um die Rosenachse besitzen.

Nur auf eins sei noch hingewiesen. Die mir von Herrn Glitscher zugeschriebene Behauptung, daß die Dämpfung von der Größe der Schritte der Nachdreheinrichtung abhängt, ist falsch. Die Dämpfung des von mir konstruierten Kompasses ist völlig unabhängig von der Größe dieses Schrittes, wie ein aufmerksamer Leser meiner Theorie der Dämpfung ohne weiteres ersieht. Tatsächlich sind die Schritte oftmals noch wesentlich kleiner als $^1/_{60}{}^0$. Die von Herrn Glitscher aus dem schrittweisen Vorgehen des Wendemotors berechnete Dämpfung ist nicht nur ohne Bedeutung, sondern nicht vorhanden.

Die Versuchsergebnisse widersprechen natürlich auch der Theorie des Herrn Glitscher. Die Versuchsresultate habe ich teilweise bereits früher Herrn Glitscher zugänglich gemacht; es würde aber zu weit führen, diese hier im einzelnen zu erörtern.

(Eingegangen 22. September 1928.)

Erwiderung.

Von K. Glitscher.

1. Ich habe nicht gesagt, daß die Dämpfung durch den Druck gegen die Rosenachse hervorgebracht wurde, sondern auf Seite 569 bewiesen, wie sie durch ein vertikales Drehmoment zustande kommt.

2. Meine Gl. 4 ist nicht falsch. Da ich die Trägheitsmomente A und B nicht mitgenommen habe, gelten wegen der Kleinheit von β meine Gleichungen ebenso um die Rosenachse wie um die Vertikale, das dämpfende Drehmoment ist auch um diese beiden Achsen, wie Seite 569 bewiesen, praktisch gleich. Die Nachdrehung geht selbstverständlich in das Gleichungssystem, insbesondere auch Gl. 6 ein, da ich ideale Nachdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ vorausetzte.

3. Ich habe Herrn M. die Behauptung nicht zugeschrieben, daß die Dämpfung von der Größe der Schritte der Nachdrehvorrichtung abhängt; das sagt er selbst an mehreren Stellen. So soll durch die Schritte des Wendemotors das Kompaßsystem mit seinem Schwerpunkt um den Winkel γ verdreht und dabei eine Arbeit proportional γ, also auch proportional dem Schritt geleistet werden. Wie dabei ein Moment um die Elevationsachse auftreten kann, ist völlig unverständlich. Herr M. hat das durchaus nicht bewiesen, sondern einfach behauptet. Wie kann denn überhaupt die Abgabe der Energie an den Wendemotor über das nachgedrehte System, das doch zweifellos um die Vertikale dreht, anders erfolgen als durch ein vertikales Drehmoment?

(Eingegangen 23. Oktober 1928.)

Schluß-Erwiderung.

Von O. Martienssen.

Zu 1. In der Gleichung 4 des Herrn Glitscher steht als dämpfendes Moment $Pl\beta$, also der Druck P zwischen Rosenachsenspitze und Schiene. Herr Glitscher sucht demnach die Dämpfung durch diesen Druck zu erklären, wie ich behauptet habe.

Zu 2. Das Glitschersche vertikale Drehmoment hat um die Rosenachse keine Komponente, wie oben bereits im zweiten Absatz ausgeführt. Die Ausführungen des Herrn Glitscher auf Seite 569, die das Gegenteil beweisen wollen, sind unrichtig. Falsch ist zunächst schon die Gleichung 7 auf Seite 568. Diese Gleichung würde nur richtig sein, wenn das Kreiselsystem starr befestigt und nicht schwimmend und drehbar aufgehängt wäre. Die von Glitscher errechnete „Differenzkomponente $Gr \sin\beta$" ist der durch den Gegendruck des Kreiselsystems nicht kompensierte Teil des am nachgedrehten Systeme angreifenden Momentes der Schwere Gr, sie

greift demnach am nachgedrehten System an. Durch den Druck gegen die Rosenachse wird kein Drehmoment um die Rosenachse auf das Kreiselsystem übertragen.

Zu 3. Die Annahme, daß „das nachgedrehte System zweifellos um die Vertikale dreht", ist falsch. Durch die Beschwerung ist das nachgedrehte System verkantet, und der Wendemotor dreht nicht um die Vertikale; gerade dadurch kommt die Dämpfung zustande.

Der Versuch hat ergeben, daß bei sehr verschiedenem Drucke P gleiche Dämpfung erzielt werden kann, womit experimentell die Gleichung 4 von Herrn Glitscher als falsch erwiesen ist.

Der Versuch hat ferner ergeben, daß die Schwingungsdauer des Kompasses mit zunehmender Dämpfung nicht zunimmt, sondern unverändert bleibt, während sie aus den Glitscherschen Gleichungen und den praktisch gewählten Konstanten berechnet, um den gut beobachbaren Wert von mehreren Minuten größer sein müßte als bei ungedämpftem Kompaß.

Der Versuch hat ferner ergeben, daß die Dämpfung in hohem Maße von der Stabilisierung des kardanisch aufgehängten Systems abhängt, eine Abhängigkeit, die aus den Glitscherschen Gleichungen ungeklärt ist.

(Eingegangen 2. Februar 1929.)

Die Verdampfung an der Kathode des Hg-Lichtbogens.

Bemerkung zu der Veröffentlichung von Herrn J. v. Issendorff (Physik. Zeitschr. **29**, 857, 1928).

Von E. Kobel.

Die von Herrn J. v. Issendorff in dieser Zeitschrift veröffentlichten Versuche über die an der Kathode des Hg-Lichtbogens verdampfende Hg-Menge erbringen den interessanten und wichtigen Beweis, daß die gesamte Kathodenoberfläche an der Verdampfung beteiligt ist. Wir sind im Forschungs-Laboratorium der A. G. Brown Boveri & Cie. in Baden schon im Januar 1927 auf etwas anderem Wege zu der Überzeugung gekommen, daß die aus der freien Hg-Oberfläche der Kathode eines Gleichrichters verdampfende Hg-Menge den Hauptteil der gesamten von der Kathode, inkl. Kathodenfleck, abgegebenen Hg-Dampfmenge ausmacht.

Bei Versuchen, den raschbewegten Kathodenfleck zu fixieren, ergab sich zugleich die bekannte Erscheinung einer wesentlichen Verminderung der von der Kathode abgegebenen Hg-Menge. Zum Teil ist dies auf das fast vollständige Aufhören der Verspritzung zurückzuführen, doch nimmt auch die Verdampfung wesentlich ab. Um diese Verringerung der Verdampfung erklären zu können, wurde vom Verfasser die Vermutung ausgesprochen, daß bei fixiertem Kathodenfleck die mittlere stationäre Oberflächentemperatur der Kathode bei gleicher Strombelastung kleiner ausfalle als bei bewegtem Kathodenfleck, und zwar aus folgenden Gründen: Wenn wir den Kathodenfleck als das kleine Gebiet auffassen, in welchem alle positiven Ionen, die am Stromtransport beteiligt sind, aus dem Entladungsraum in die Kathode eintreten, so ist dies auch zugleich dasjenige Gebiet, in welchem sich die kinetische Energie dieser Ladungsträger in Wärme umsetzt. Abgesehen von der Neutralisationswärme dieser positiven Ionen wird daher im Kathodenfleck eine Wärmemenge frei, die bestimmt ist durch den Kathodenfall und durch den prozentualen Anteil, mit welchem sich die positiven Ionen am Stromtransport beteiligen. Derjenige Anteil dieser Wärme, der durch Leitung zunächst an das Kathoden-Hg übergeht, ist nun bei bewegtem Kathodenfleck größer als bei fixiertem, weil der Temperaturgradient in der nächsten Umgebung der Wärmequelle in der Richtung des flüssigen Hg stets größer ist als bei stabilem Fleck. Diese Vermutung fand ihre Bestätigung in dem folgenden einfachen Versuch:

In einer Porzellanschale von ca. 20 cm Durchmesser befinden sich 500 cm^3 Wasser von der Anfangstemperatur t^0 C. Dieses Wasser wird nun mit einem Handgebläsebrenner mit spitz eingestellter Stichflamme (bei konstantem Gas- und Luftdruck) auf zwei verschiedene Arten erwärmt.

a) Der Brenner wird in einem Stativ so festgehalten, daß sich die Mündung desselben 4,5 cm über der Mitte des Wasserspiegels befindet.

b) Der Brenner wird längs eines Durchmessers auf der Wasseroberfläche hin und her bewegt, wobei der Abstand der Mündung vom Wasser gleich wie bei a) 4,5 cm beträgt.

Die Dauer der Erwärmung ist in beiden Fällen dieselbe; gleich 15 Min. Nach der Erwärmung werden mittlere Temperatur und Wassermenge gemessen.

In Tabelle I sind die Ergebnisse der Versuche zusammengestellt.

Obwohl der beschriebene einfache Versuch natürlich den ganzen Vorgang der Hg-Verdampfung auf der Kathode im Gleichrichter nicht naturgetreu wiederzugeben imstande ist, scheint er doch eine Bestätigung dafür zu sein, daß die mittlere Oberflächentemperatur der

Tabelle I.

Art der Erwärmung	Wassermenge vor der Erwärmung cm³	Wassermenge nach der Erwärmung cm³	Verdampfte Wassermenge cm³		Temperaturen vor der Erwärmung °C	Temperaturen nach der Erwärmung °C	
Brenner fest	500	407	93,0	91,5	14,5	74	74
	500	410	90,0		14,5	74	
Brenner bewegt	500	350	150,0	141,0	14,5	82	80,5
	500	368	132,0		14,5	79	

Tabelle II.

t °C	T °K	p mm Hg	q_s g · cm^{-2} · sec^{-1}	$q_{Fe} = q_s - 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ g · cm^{-2} · sec^{-1}
20	293	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	$5{,}3 \cdot 10^{-5}$	0
40	313	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$27{,}9 \cdot 10^{-5}$	$22{,}6 \cdot 10^{-5}$
60	333	$26{,}5 \cdot 10^{-3}$	$113{,}0 \cdot 10^{-5}$	$108 \cdot 10^{-5}$
80	353	$92{,}0 \cdot 10^{-3}$	$396{,}0 \cdot 10^{-5}$	$391 \cdot 10^{-5}$
100	373	$279 \cdot 10^{-3}$	$1200 \cdot 10^{-5}$	$1195 \cdot 10^{-5}$
120	393	$755 \cdot 10^{-3}$	$3160 \cdot 10^{-5}$	$3155 \cdot 10^{-5}$
140	413	$1854 \cdot 10^{-3}$	$7560 \cdot 10^{-5}$	$7555 \cdot 10^{-5}$
160	433	$4179 \cdot 10^{-3}$	$16700 \cdot 10^{-5}$	$16695 \cdot 10^{-5}$
180	453	$8758 \cdot 10^{-3}$	$34200 \cdot 10^{-5}$	$34195 \cdot 10^{-5}$
200	473	$17220 \cdot 10^{-3}$	$67600 \cdot 10^{-5}$	$67595 \cdot 10^{-5}$

Kathode bei bewegtem Kathodenfleck größer ist als bei fixiertem.

Ausgehend von der Oberflächentemperatur der Hg-Kathode läßt sich die, in einem Hochvakuumraum durch Verdampfung abgegebene Hg-Menge auf einfache Art rechnerisch bestimmen. Aus der kinetischen Gastheorie folgt, wenn bedeuten[1]):

γ = Dichte des Dampfes oder Gases in g · cm^{-3},
p = Druck des Dampfes oder Gases in mm Hg,
T = Absolute Temperatur,
R = Allgemeine Gaskonstante ($R = 8{,}313 \cdot 10^7$ erg. grad^{-1}),
M = Molekulargewicht,
Z = Anzahl der pro sec. auf 1 cm² der Gefäßwand der auftreffenden Moleküle,
q = Gewicht dieser Moleküle in g,
N = Loschmidtsche Zahl ($N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}),

$$Z = \frac{N \cdot p}{4R \cdot Z} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}} = 3{,}54 \cdot 10^{22} \frac{p}{\sqrt{M \cdot Z}}, \quad (1)$$

$$q = \frac{M \cdot p}{4R \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot M}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi \cdot R}} \cdot \sqrt{\frac{M}{T}}, \quad (2)$$

$$q = 5{,}85 \cdot 10^2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{M}{T}} \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad (3)$$

für Hg ist $M = 200{,}6$,

$$q = 0{,}828 \cdot \frac{p}{\sqrt{T}}. \quad (4)$$

1) J. Langmuir, Physik. Zeitschr. **14**, S. 1273, 1913.

Die pro sec und cm² von der Oberfläche einer Flüssigkeit verdampfende Menge q_{Fl} ist gerade so groß, wie die beim Sättigungsdruck pro cm² sec auftreffende Menge q_s vermindert um die aus dem über der Flüssigkeit befindlichen Dampf vom Druck p pro cm² sec auf die Flüssigkeitsoberfläche zurücktretende Dampfmenge q_p

$$q_{Fl} = q_s - q_p.$$

Von einer Hg-Oberfläche von 1 cm², welche sich in einem evakuierten Gefäß befindet, an dessen Wänden der Hg-Dampf bis auf einen ganz kleinen Restdruck (für $T = 293^0$ $p_s = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg) kondensiert, verdampft daher für die verschiedenen Hg-Temperaturen T die Hg-Dampfmenge

$$q_{Fl} = q_s - 5{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Der Sättigungsdruck p kann für die Temperaturen $T = 0 + 273$ bis $T = 450 + 273$ den Tabellen aus Landolt-Börnstein 1923, S. 1335 entnommen werden, womit die Zahlenwerte der Tabelle II aus den Formeln 4 und 5 berechnet werden können.

Bei einem Gleichrichter mit einem Kathodendurchmesser von 16 cm beträgt die freie Hg-Oberfläche 200 cm². Der Kathodenfleck hat bei einem Kathodenstrom von z. B. 500 Amp. einen Flächeninhalt von

$$f = 500 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{-4} = 0{,}125 \text{ cm}^2 \text{ [1])}.$$

Die freie Hg-Oberfläche ist daher 1600 mal

größer als die Fläche des Kathodenfleckes bei 300 Amp. Kathodenstrom. Nach der Verdampfungskonstante von Güntherschulze[1]) würde sich für diesen Kathodenstrom eine verdampfende Hg-Menge von 3,6 g · sec^{-1} ergeben. Berechnet man nun die von der ganzen Kathodenoberfläche bei verschiedenen Oberflächentemperaturen verdampfende Hg-Menge, so sieht man, daß schon bei einer Temperatur von wenig über 100° aus der Oberfläche der Kathode ebensoviel verdampft, wie nach Güntherschulze aus dem Kathodenfleck verdampfen sollte. Tabelle III enthält die für eine Kathode von 16 cm Durchmesser und einen Strom von 500 Amp. geltenden Zahlenwerte.

Tabelle III.

Hg-Oberflächen-Temperatur	Aus der Hg-Oberfläche verdampfende Hg-Menge ohne Kathodenfleck	Aus dem Kathodenfleck bei einem Strom von 500 Amp. nach Güntherschulze verdampfende Hg-Menge
60° C	0,216 g · sec^{-1}	3,6 g · sec^{-1}
80° C	0,782 g · sec^{-1}	
100° C	2,39 g · sec^{-1}	
120° C	6,31 g · sec^{-1}	
140° C	15,1 g · sec^{-1}	
160° C	33,4 g · sec^{-1}	

Welche mittlere Oberflächentemperatur die Hg-Kathode annimmt, ist nur eine Frage der gesamten Wärmezufuhr aus Kathodenfleck und Lichtbogen und der Wärmeabfuhr durch äußere Kathodenkühlung. Immer stellt sich eine solche Oberflächentemperatur ein, daß die Verdampfungswärme und die durch Kühlung der Kathode abgeleitete Wärme zusammen den gesamten Wärmegewinn der Kathode ausmachen. So ist es möglich, wie Versuche gezeigt haben, daß die verdampfende Hg-Menge durch besonders gute Kühlung der Kathode auf einen ganz kleinen Bruchteil der von Güntherschulze gefundenen Menge reduziert werden kann, ohne daß sich die elektrischen Verhältnisse des Bogens viel ändern.

1) Zeitschr. f. Phys. **2**, 74—87, 1922.

(Eingegangen 30. Januar 1929.)

Einige Versuche mit dem elektrolytischen Generator.

Von V. M. Schulgin.

In meiner vorigen Mitteilung[1]) habe ich ein Verfahren beschrieben zur Erzeugung elektromagnetischer Schwingungen mit Hilfe eines Gefäßes für Elektrolyse, in dem sich ein Platindraht befindet, der durch einen elektrischen Strom zum Glühen gebracht werden kann. Die Erscheinung ist dem Lichtbogen analog und wird von einer starken elektromagnetischen Ausstrahlung begleitet.

Das Ende des als negative Elektrode dienenden Platindrahts ist jedoch nur von kurzer Lebensdauer, es reicht bloß für 1—2 Arbeitsstunden und muß dann ersetzt werden. Um diesem Übelstand abzuhelfen und die Haltbarkeit der Platinelektrode zu verlängern, hatte ich mir eine Vervollkommnung dieser Elektrode zur Aufgabe gestellt. Gleichzeitig forschte ich auch nach der Hauptentstehungsursache der Schwingungen. Als solche erwies sich der auf dem Platindraht ausgeschiedene Wasserstoff. Letzteres ist aus Tabelle I, in der die Versuchsresultate mit Gefäßen mit verschiedenen Elektrolyten und negativen Eisen- und Platinelektroden gezeigt sind, ersichtlich.

Der Generator wird einerseits mit einer Zimmerantenne von 5 m Länge und 2 m Höhe andererseits mit der Erde verbunden; an den

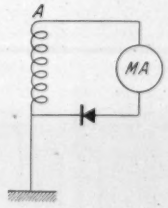


Fig. 1.

in demselben Zimmer befindlichen Detektor-Empfänger wurde als Erdung ein mit der Gasleitung verbundenes 1 m langes Stück Draht angeschlossen.

Fig. 1 zeigt das Schema des Empfängers. Bei den ersten 6 Versuchen waren die Wasserstoff-, beim 7. Versuch die Magnesium- und beim 8. die Eisenlinien im Spektroskop deutlich sichtbar.

Dieser Umstand zeugt von einer hohen Temperatur der Kathode, wie auch davon, daß wir nur bei Anwesenheit von Wasserstoff in erhitztem

1) Physik. Zeitschr. **29**, 724—726, 1928.

Tabelle I.

Gleichstromspannung 120 Volt.

Elektrolyt	Stromstärke im Kreise des Generators	Stromstärke in der Antenne	Stromstärke im Empfänger	Material der Elektrode
1. 50proz. HCl-Lösung Spez. Gew. 1,19	0,15 Amp.	—	1,2 mA	Platin
2. 50proz. HCl-Lösung Spez. Gew. 1,19	0,20 „	—	1,4 „	„
3. 25proz. HCl-Lösung	0,15 „	0,02 Amp.	1,2 „	„
4. 25proz. HCl-Lösung	0,20 „	0,04 „	1,4 „	„
5. 12proz. HCl-Lösung	0,15 „	0,02 „	1,0 „	„
6. 12proz. HCl-Lösung	0,20 „	0,03 „	1,2 „	„
7. 20proz. $MgSO_4$-Lösung	0,15 „	—	2 μA	„
8. 25proz. H_2SO_4-Lösung	0,20 „	—	2 „	Eisen

Zustande eine Erzeugung von Hochfrequenzströmen erhalten.

Wenn bei der Elektrolyse von $MgSO_4$ ebenfalls eine schwache Ausstrahlung beobachtet wird, so läßt sich dieses durch das unbedeutende Erscheinen von Wasserstoff, nach der Gleichung:

$$Mg + 2\,H_2O = Mg(OH)_2 + H_2$$

erklären, was stattfinden kann, da sich das Magnesium „in statu nascendi" befindet. Nachdem der Apparat einige Zeit gearbeitet hat, ist die Kathode in der Tat von einer Magnesiumhydroxydwolke umgeben.

Nachdem ich mich davon überzeugt hatte, daß die Anwesenheit von Wasserstoff die Erzeugung von Hochfrequenzströmen befördert, stellte ich eine besondere Gaselektrode, wie sie

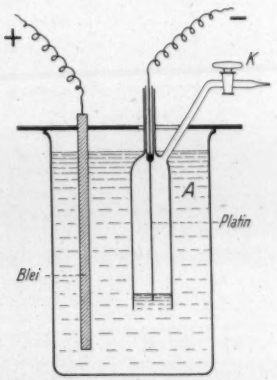


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt, her. Diese Elektrode stellt eine kleine Glasglocke A dar, in welcher ein langer als Kathode dienender Platindraht (einige Zentimeter lang) gut befestigt ist. Außerdem ist eine Röhre mit Hahn K vorhanden, durch welche der Gasüberschuß entfernt werden kann. Die ganze Glocke wird in die Säure getaucht und elektrolytisch mit Wasserstoff gefüllt. Wenn nun das Ende des Drahts in die Säure getaucht ist, so geht die Erzeugung von Hochfrequenzstrom von selbst vor sich, was an der Verringerung der Stromstärke im Kreise, am Leuchten der Drahtspitze und einem besonderen Geräusch in den Kondensatoren leicht festzustellen ist. Tab. II bringt ein Beispiel der bei den Versuchen erhaltenen Ergebnisse bei einer Spannung von 240 Volt.

Tabelle II.

Zeit	Stromstärke in der Zimmerantenne	Stromstärke im Empfänger
2h 10m	0,143 Amp.	3,05 mA
2h 20m	0,143 „	3,05 „
2h 30m	0,143 „	3,05 „

Erzeugung von hochfrequenten Schwingungen findet auch noch statt, sogar mit höherer Intensität, wenn man die Selbstinduktionsspulen aus dem Generatorkreise ganz fortläßt.

Tabelle III.

Stromstärke im Schwingungskreise mit Kapazität allein	Stromstärke im Kreise mit Kapazität und Selbstinduktion von 0,1 millihenry
0,140 Amp.	0,070 Amp.
0,165 „	0,080 „
0,215 „	0,090 „
0,225 „	0,100 „
0,410 „	0,170 „

Auch ohne jegliche Meßvorrichtungen kann man sich davon überzeugen, daß wir es bei den geschilderten Versuchen mit Hochfrequenzströmen zu tun haben.

1. An eine Zimmerantenne schalten wir statt eines Amperemeters eine Glühlampe; letztere

leuchtet und weist auf einen starken Strom hin, der in dem „nichtgeschlossenen" Kreise fließt.

2. Nehmen wir den einen Pol der Glühlampe in die Hand und berühren mit dem anderen die Antennenklemme, so erhalten wir auch in diesem Falle ein Leuchten, das stärker wird, wenn mehrere Personen sich an dem Versuch beteiligen. (Die Kapazität der „Antenne" nimmt zu).

Wir bekommen also hier genau dieselben Erscheinungen wie beim Tesla-Apparat.

Die Benutzung der von mir beschriebenen Gaselektrode dürfte nicht nur die einfachste, sondern auch die sicherste Vorrichtung zur Erzeugung von Hochfrequenzströmen sein.

Die Art der mit diesem Generator erzeugten Schwingungen denke ich demnächst näher zu untersuchen.

Moskau, 20. November 1928.

(Eingegangen 24. November 1928.)

Zur Wirkungsweise des Elektronenzählrohres von Geiger und Müller.

Von Heinrich Kniepkamp.

Die Versuche von Geiger und Müller (1) mit dem „Elektronenzählrohr" ähneln in mancher Beziehung früheren Versuchen, bei denen zum quantitativen Nachweis von γ-Strahlen oder kurzwelligem Licht Zählkammern von ähnlicher Konstruktion wie das Elektronenzählrohr (vgl. z. B. die Versuche von Heß und Lawson (2) mit einer der Zählkammer für α-Strahlen von Geiger und Rutherford (3) nachgebildeten Apparatur) oder Glimmlampen mit den verschiedensten Elektrodenformen (v. Baeyer und Kutzner (4), Kniepkamp (5)) benutzt wurden. Wie z. B. die letztgenannten Versuche zeigten, ist es möglich, in einer Glimmlampe, die mit einem hohen Vorschaltwiderstande in Reihe liegt, durch durchdringende Strahlung einzelne Ionisationsstromstöße auszulösen, deren Häufigkeit ein Maß für die Intensität der Strahlung ist. Wichtig ist für das Gelingen solcher Versuche neben der richtigen Wahl der Spannung die Wahl des Vorschaltwiderstandes, der der im Entladungskreise vorhandenen Kapazität, die sich z. B. aus der Kapazität der Entladungsröhre selbst und deren Zuleitungen zusammensetzt, angepaßt werden muß, und auch durch eine Glühkathodenröhre als Ventilröhre ersetzt werden kann.

Das von Geiger und Müller konstruierte Elektronenzählrohr unterscheidet sich von den bei obigen Versuchen benutzten Glimmlampen im wesentlichen nur durch die Form der Elektroden. Auch die Anordnung des Entladungskreises ist in der Hauptsache dieselbe. Doch geben Geiger und Müller an, daß in dem Rohr nur dann eine Löschwirkung nach jedesmaligem Einsetzen des Ionisationsstromes eintritt, wenn der als Anode dienende Eisendraht mit einer schlecht leitenden Schicht überzogen ist, während bei blankem Draht die einmal eingeleitete Entladung nicht wieder abbricht. Daß Verunreinigungen der Gasstrecke in Form von Wasserdampfresten u. dgl. bei dem Zündungsvorgang eine gewisse Rolle spielen, ergaben auch die Versuche von Kniepkamp (5), und zwar zeigte es sich, daß die Art der Zusammensetzung des Gasgemisches mit der Größe des zur Erzielung der Löschwirkung benötigten Vorschaltwiderstandes in gewissem Zusammenhang zu stehen scheint.

Als Grund dafür wurde damals ebenfalls die Aufladung von Doppelschichten an der Oberfläche der Elektroden vermutet. Jedoch war auch bei verhältnismäßig reinen Gasstrecken stets Löschwirkung durch einen genügend großen Vorschaltwiderstand zu erzielen, was auch durch neuere Versuche, bei denen die Elektroden durch stundenlanges Erhitzen während des Auspumpens der Entladungsröhre von den gröbsten Verunreinigungen befreit wurden, bestätigt worden ist. Außerdem handelt es sich ja auch bei diesen Versuchen um verhältnismäßig so geringe Verunreinigungen der Elektrodenoberflächen, daß sie ohne Bedenken als „blank" im Vergleich zu dem künstlich verunreinigten Draht des Elektronenzählrohres angesehen werden können. Der Befund von Geiger und Müller ist daher mit jenen Versuchen nicht in Einklang zu bringen, vielmehr müßte man zunächst annehmen, daß auch ein Elektronenzählrohr mit blankem Draht zum richtigen Arbeiten gebracht werden kann, wenn nur der Vorschaltwiderstand richtig gewählt wird.

Diese Annahme hat sich nun in Versuchen mit nach den Angaben von Geiger und Müller angefertigten Zählrohren als richtig erwiesen. Es zeigte sich als durchaus möglich, in einem solchen Zählrohre mit z. B. blankem *Cu*- oder *Pt*-Draht bei genügend großem Vorschaltwiderstande einzelne Ionisationsstromstöße durch γ-Strahlen auszulösen, und zwar bestand diese Entladungsart innerhalb eines bestimmten Spannungsbereiches, oberhalb dessen kontinuierliche Entladung eintrat. Besonders beweisend scheint folgender Versuch zu sein: Das Zählrohr befindet sich in einem Glasgefäß, welches so konstruiert ist, daß der als Anode dienende *Fe*-Draht innerhalb des Rohres ohne sonstige Änderung der Versuchsbedingungen verschoben werden kann. Die eine Hälfte des Drahtes ist blank, die andere

nach der Vorschrift von Geiger und Müller durch Eintauchen in Salpetersäure präpariert. Der Versuch ergab nun, daß es bei einem Vorschaltwiderstande von 10^9 Ohm ganz gleichgültig war, ob die blanke oder die verunreinigte Hälfte des Drahtes in das Kathodenrohr hineingezogen wurde. Der gleiche Versuch wurde — mit dem gleichen Ergebnis — mit einem Draht gemacht, dessen einer Teil aus blankem *Pt*, der andere aus präpariertem *Fe* bestand.

Dieses Resultat ist um so weniger mit den Angaben von Geiger und Müller in Einklang zu bringen, als diese Autoren ebenfalls mit Vorschaltwiderständen von der gleichen Größenordnung wie im obigen Versuche gearbeitet haben. Die Vermutung, daß vielleicht zur Erzielung der Löschwirkung bei blankem Drahte ein bedeutend größerer Vorschaltwiderstand benötigt werde als bei verunreinigtem Drahte, und die Diskrepanz in den Versuchsergebnissen so zu erklären sei, daß in den Versuchen von Geiger und Müller mit blankem Draht der Vorschaltwiderstand nicht hoch genug gewählt worden ist, wird daher hinfällig. Zum besonderen Beweis dieser Folgerung wurde aber noch das Verhalten des Zählrohres in bezug auf die Löschwirkung bei verschiedenen Vorschaltwiderständen untersucht, wobei festgestellt wurde, daß bis zu einem Widerstande von $2 \cdot 10^7$ Ohm bei blankem wie bei verunreinigtem Drahte Löschwirkung bestand, unterhalb dessen bei beiden jedoch nicht mehr.

Bei den beschriebenen Versuchen wurden Zählrohre von den verschiedensten Dimensionen untersucht, die Zylinderoberfläche der Kathode (Messing) variierte zwischen 4 und 50 cm². Die Empfindlichkeit der Zählrohre wurde nur oberflächlich bestimmt, sie stimmte ungefähr mit der von Geiger und Müller angegebenen überein. So wurden z. B. mit dem Zählrohr mit 4 cm² Oberfläche bei Anwesenheit von ungefähr 0,6 mg *Ra* in 1 m Entfernung 30 bis 40 Stöße pro Minute und cm² gezählt. Die Zahl der spontanen Stöße betrug etwa 7 min · cm². Die Empfindlichkeit war natürlich bei blankem Drahte die gleiche wie bei verunreinigtem Drahte.

Somit scheint nach diesen Versuchen die Oberflächenbeschaffenheit des Anodendrahtes auf das Bestehen der Löschwirkung und damit auf die Wirkungsweise des Elektronenzählrohres keine oder nur untergeordnete Bedeutung zu haben. Irgendwelche Anhaltspunkte für die Ursache der Diskrepanz zwischen diesem Ergebnis und den Angaben von Geiger und Müller konnten bisher nicht gefunden werden.

Literaturangaben.

1) H. Geiger u. W. Müller, Physik. Zeitschr. **29**, 839, 1928.
2) V. F. Heß u. R. W. Lawson, Wien. Ber. 125, 285, 585, 1916.
3) H. Geiger u. E. Rutherford, Phil. Mag. 24, 618, 1912.
4) O. v. Baeyer u. Kutzner, Zeitschr. f. Phys. 21, 46, 1924.
5) H. Kniepkamp, Zeitschr. f. Phys. **40**, 12, 1926.

Berlin, Inst. f. Phys. d. Landw. Hochschule.

(Eingegangen 15. Februar 1929.)

Über die Hartmannsche Beziehung zur Eichung von Spektralapparaten.

Von Fr. Hoffmann.

Für die Eichung von Teilungen, die im wesentlichen von der Dispersion eines prismatischen Spektrums abhängen, hat J. Hartmann (1898)[1] auf Grund seiner Dispersionsformel folgende Beziehung aufgestellt.

$$p = p_0 + \frac{C}{(\lambda - \lambda_0)^\alpha}, \qquad (1)$$

worin p den Teilstrich bei der Wellenlänge λ (in μ) bedeutet und λ_0 und α Konstanten sind von etwa folgenden Beträgen:

$$\lambda_0 = 0{,}2000, \quad \alpha = 1,$$

während p_0 und C von der Art der Teilung abhängen.

Macht man die einfachste, meist ausreichende Annahme, daß $\alpha = 1$ ist, so lassen sich die übrigen 3 Konstanten p_0, λ_0, C aus 3 Beobachtungen bestimmen nach der Gleichung

$$p \cdot \lambda = a + p_0 \lambda + \lambda_0 p, \text{ wobei } a = C - p_0 \lambda_0 \qquad (2)$$

ist.

Bei der praktischen Eichung eines Spektralapparates wird man sich nun im allgemeinen nicht mit der gerade notwendigen Zahl von 3 Beobachtungen begnügen, sondern eine größere Anzahl von Messungen bei gut einstellbaren Spektrallinien machen, um daraus eine Tabelle für die Abhängigkeit der Wellenlängen von der Teilung p oder umgekehrt aufzustellen.

Zu diesem Zweck kann man unmittelbar die Gleichung (1) mit $\alpha = 1$, also

$$p = p_0 + \frac{C}{(\lambda - \lambda_0)}$$

verwenden, d. h. von der Tatsache Gebrauch machen, daß p in großer Annäherung eine lineare Funktion von $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ ist. Die Durchführung der Rechnung erfordert nur eine Bestimmung der

1) J. Hartmann, Publ. Astrophys. Observ. Potsd. **12**, Anhang (Nr. 42), 1898.

einen Konstanten λ_0 aus 3 geeignet ausgewählten Beobachtungen und eine lineare Interpolation der p-Werte für die $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ Werte. Bildet man dann die Differenzen $\Delta p = p - p'$, worin p die beobachteten, p' die linear interpolierten Werte sind, so erhält man Reste von meist nur geringer Größe, die sich leicht graphisch ausgleichen und als Korrektionen an den linear berechneten Werten anbringen lassen. Man erhält so eine Tabelle für die zu vorgegebenen λ-Werten gehörigen p-Werte der Teilung.

Oft stellt sich aber der Wunsch ein, umgekehrt λ als Funktion von p darzustellen, oder statt der Wellenlänge λ die Frequenz $\nu = \frac{1}{\lambda}$ als Variable einzuführen und dann p als Funktion von ν oder umgekehrt darzustellen. Allen diesen Fällen läßt sich die Rechenmethode ohne Schwierigkeit anpassen. Durch eine einfache Umformung ergeben sich nämlich aus der Hartmannschen Formel folgende 4 Gleichungen

$$\text{aus } p \cdot \lambda = a + b\lambda + cp: \quad \left| \begin{array}{l} a = C - p_0 \lambda_0 \\ b = p_0 \end{array} \right. \qquad (3a)$$

$$p \cdot (\lambda - c) = a + b\lambda \qquad c = \lambda_0 \qquad (3b)$$

$$\text{und aus } p \cdot \nu = a' + b'\nu + c'p: \quad \left| \begin{array}{l} a' = -p_0 \nu_0 \\ b' = p_0 - C\nu_0 \end{array} \right. \qquad (4a)$$

$$\nu \cdot (p - b') = a' + c'p \qquad c' = \nu_0 \qquad (4b)$$

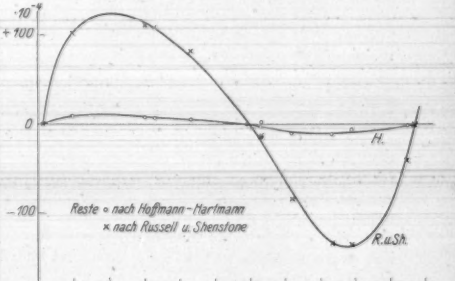
Diesen vier gleichartig gebauten Formeln ist gemeinsam, daß ein Produkt, das beide Variable enthält, eine lineare Funktion der einen Variablen ist. Die praktische Rechenmethode läuft also darauf hinaus, daß man nach Bestimmung der Konstanten (es genügen c, b, c' oder b') die linksseitigen Produkte bildet und sie linear für vorgegebene Zwischenwerte von p, λ oder ν interpoliert. Die Reste ergeben wieder die Korrektionen an den linear berechneten Werten. Da die Formeln nur Umformungen der ursprünglichen Hartmannschen Gleichung sind, so sind auch die Reste, wenn man sie in gleichem Maße (etwa als $\Delta\nu$) ausdrückt, in allen vier Fällen gleich groß.

Die neuen Formeln haben nicht nur den Vorteil, sich der Wahl der unabhängigen und abhängigen Variablen aufs leichteste anzupassen, sondern sie gestatten auch eine etwas einfachere Rechnung. Die tabellenmäßige Bildung der Quotienten $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ ist auch mit der Rechenmaschine sicher etwas zeitraubender als die Multiplikation der linksseitigen Faktoren miteinander.

Neuerdings haben nun Russell und Shenstone (1928)[1]) eine verkürzte Methode der Berechnung angegeben, bei welcher der Umstand benutzt wird, daß nahezu

$$\nu = \nu_0 + ap + bp^2$$

ist. Sie berechnen also die Konstanten der quadratischen Gleichung und stellen ν als Funktion der p dar, wobei das quadratische Glied klein genug ist, um mit dem Rechenschieber berechnet zu werden. Der rechnerische Vorteil liegt auf der Hand, da die Zeile für Zeile auszuführenden Divisionen, wie sie die Hartmannsche Methode erfordert, fortfallen. Indessen ist doch die Leistungsfähigkeit der quadratischen Formel viel geringer. Um das zu zeigen, sei folgendes Zahlenbeispiel wiedergegeben, das der Eichung eines



Spektralphotometers nach König-Martens an 15 Punkten entnommen ist.

Es wurden gefunden bei			die Reste	
p	λ	ν	H	R. u. Sh.
8,614	0,4047	2,4712	$0 \cdot 10^{-4}$	$0 \cdot 10^{-4}$
15,441	0,4471	2,2364	$-12 \cdot 10^{-4}$	$-134 \cdot 10^{-4}$
21,018	0,5016	1,9937	$0 \cdot 10^{-4}$	$0 \cdot 10^{-4}$
25,819	0,5780	1,7301	$+7 \cdot 10^{-4}$	$+109 \cdot 10^{-4}$
30,331	0,7065	1,4154	$0 \cdot 10^{-4}$	$0 \cdot 10^{-4}$

Die Reste sind in beiden Fällen ähnlich verteilt, nur sind die Beträge bei der Rechnung nach Russell und Shenstone mehr als zehnmal so groß wie bei der Rechnung nach Hartmann (s. Kurvenblatt). Unter diesen Umständen fragt es sich doch, ob der Mehraufwand der Rechenarbeit nicht mehr als aufgewogen wird durch die sehr viel größere Genauigkeit des Ergebnisses. Der weitere von Russell und Shenstone für ihre Formel in Anspruch genommene Vorteil, daß sie nämlich unmittelbar die Auswertung in Frequenzen statt in Wellenlängen erlaubt, ist nach den oben mitgeteilten Formeln nicht mehr stichhaltig.

(Eingegangen 15. Februar 1929.)

1) H. N. Russell und A. G. Shenstone, Journ. Opt. Soc. Amer. **16**, 298—300, 1928.

Über Phosphoreszenz und photochemische Wirkung einiger mit ultra-violettem Licht bestrahlter organischer und anorganischer Substanzen.

Von F. Kirchhof.

Es wurde die Beobachtung gemacht, daß dem Licht einer Hg-Dampflampe längere Zeit ausgesetzt gewesene organische Substanzen, bei welchen Phosphoreszenzerscheinungen bekanntlich noch wenig bekannt sind, solche in erheblichem Maße und mit relativ langer Nachleuchtdauer aufweisen. Auch eine deutliche Wirkung derart belichteter Substanzen auf die photographische Platte wurde beobachtet. Des weiteren konnte gezeigt werden, daß gewisse andere Substanzen, welche nach der Ultraviolettlicht-Bestrahlung keine sichtbare Phosphoreszenz aufwiesen, eine deutliche Wirkung auf die photographische Platte ausüben, auch noch längere Zeit nach dem Aufhören der U. V.-Bestrahlung.

Es wurde bereits vor längerer Zeit die rein gefühlsmäßige Beobachtung gemacht, daß intensiv mit U. V.-Licht bestrahlte Substanzen, z. B. gewisse Papiersorten, unmittelbar nach dem Abstellen der Lichtquelle außer der Wärmestrahlung noch eine andere, quasi dunkle U. V.-Strahlung von deutlicher Wirkung auf empfindliche Teile der Haut ausstrahlen.

Ein u. v.-belichtetes (schwach grünliches) Papier wurde unmittelbar nach dem Abstellen der Lichtquelle direkt auf die photographische Platte (orthochromatische Analo-Flavin, Hauff) unter Zwischenschaltung einer sternförmig ausgeschnittenen Aluminiumfolie 16 Stunden in der verschlossenen Kassette einwirken lassen. Das Ergebnis dieser Einwirkung nach Entwicklung der Platte (Karbonal 1 : 30) und darauf folgender Quecksilberverstärkung, zeigt Fig. 1. Man sieht (auf dem negativ) deutliche Schwärzung der direkt mit dem Papier in Berührung gestandenen Teile der Platte. Ein gleichermaßen belichtetes schwarzes photographisches Papier zeigte bei gleichlanger Einwirkung auf eine analoge Platte nicht die geringste Schwärzung. Sichtbare Phosphoreszenz unmittelbar nach dem Ausschalten der U. V.-Lichtquelle konnte bei dem die geschilderte photochemische Wirkung zeigenden Papier nicht beobachtet werden.

Es lag daher die Vermutung nahe, daß einer der Aschenbestandteile des Papieres möglicherweise die Ursache für die photochemische Wirkung bilden könnte, dessen sichtbare Phosphoreszenzwirkung zufolge der feinen Verteilung dieser Bestandteile für das Auge verloren ging. Das Papier wurde daher verascht und die Asche näher untersucht. Sie erwies sich zum größten Teil als Al_2O_3, welches zum Teil direkt in verdünnten *HCl*, zum Teil erst nach dem Aufschließen mit $NaKCO_3$ darin löslich war. Im *HCl*-löslichen Anteil fanden sich noch die Ionen des *Ca* und Spuren von *Fe*. Andere Schwermetalle, insbesondere *Mn* oder *Zn* konnten nicht nachgewiesen werden. Das anorganische Füllmittel des Papieres scheint demnach vorwiegend aus Kaolin bestanden zu haben. Ein Teil der Papierasche wurde mit etwas arabischen Gummi angerührt und in Form einer charakteristischen Figur auf ein Stück des ursprünglichen Papieres gestrichen, getrocknet und hierauf nach dem Belichten mit U. V.-Licht auf Phosphoreszenz geprüft. Die Aschenfigur ergab eine deutliche, grauviolette Phosphoreszenz von etwa 5 Sek. Nachleuchtdauer. Wurde nun dieses längere Zeit mit Hg-Dampflicht belichtete Blatt gleichzeitig mit einem des gleichen unbelichteten Papieres wieder etwa 5 Sek. nach dem Aufhören der Belichtung auf die photographische Platte in der Kassette gebracht und wieder 16 Stunden einwirken lassen, so war nach der Entwicklung und Verstärkung wie in Fig. 1, im Negativ die Aschenfigur von der gleichen Helligkeit wie die Stelle, welche mit dem unbelichteten Papier in Berührung war, während die mit bestrahltem Papier in Kontakt gewesenen Plattenstellen wieder deutliche Schwärzung zeigten. Die Ursache der photochemischen Wirkung des bestrahlten Papieres kann demnach nicht auf die Phosphoreszenzstrahlung der Aschenbestandteile desselben zurückgeführt werden, sondern muß anderer Art sein. Es ergab sich noch, daß die photochemische Wirkung des bestrahlten Papieres auch noch durch ein Blatt des gleichen, aber unbelichteten Papieres hindurch nachzuweisen war. Die Schwärzung war in diesem Falle etwa ein Viertel der in Fig. 1 erzielten, unter sonst gleichen Bedingungen. Dies zeigt auch, daß eine rein chemische Wirkung (etwa Reduktion) als Ursache der Schwärzung nicht in Frage kommt.

Es wurde nun nach anderen organischen und anorganischen Substanzen gesucht, welche nach der U. V.-Lichtbestrahlung Phosphoreszenz oder photochemische Wirkung auf die Platte zeigten. So wurden besonders einige Substanzen daraufhin geprüft, welche im „Filter-U. V." der Analysen-Quarzlampe Heraeus, Hanau, starke Fluoreszenz zeigten. Die nachstehende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der bei diesen Versuchen gewonnenen Ergebnisse.

Die Wirkung des u. v.-belichteten Fluorens auf eine photographische Platte der gleichen Qualität wie der zur Aufnahme Fig. 1 verwendeten unmittelbar nach dem Abstellen der Lichtquelle zeigt Fig. 2.

Die mit *Al*-Folie oder Glas während der Belichtung abgeschirmten Stellen zeigen keine Ein-

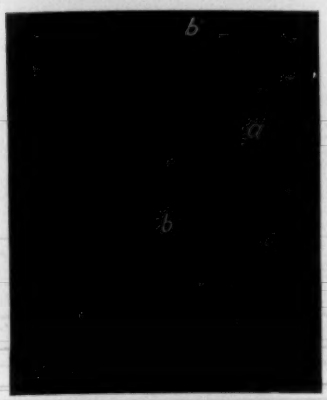


Fig. 1. Wirkung von u. v.-belichtetem Papier auf die photographische Platte; 16 Stunden exponiert. a) *Al*-Folie zwischen Papier und Platte während der Exposition. b) U.V.-Licht ausgesetzt gewesene Teile des Papieres.

Fig. 2. Wirkung von u. v.-belichteten Fluoren auf die photographische Platte. a) durch *Al*-Folie, b) belichteter Teil, c) durch Glas während der Belichtung abgeschirmte Teile.

Fig. 3. Wirkung von u. v.-belichteten organischen und anorganischen Substanzen auf die photographische Platte. Expositionsbeginn etwa 10 Sek. nach dem Aufhören der U.V.-Beleuchtung. *Ph* = Phenyl-β-Naphthol. *Zn* = *Zn*-Salz einer organischen Sulfosäure, *F* = Fluoren, *R* = Röntgenschirm ($BaPtCy_4$).

Fig. 4. Wirkung eines u. v.-belichteten Röntgenschirms (*R*) auf die photographische Platte, 24 Stunden nach dem Aufhören der U.V.-Bestrahlung. Exposition der Platte 24 Stunden.

Substanz (chem. rein, kristall.)	Luminiszenzfarbe im Filter-U.V. der Analysen-Qu.L.	Phosphoreszenzfarbe nach der Belichtung mit U.V.-Licht	Sichtbare Nachleuchtdauer in Sekunden	Wirkung d. mit U.V. belichteten photographischen Platte
Fluoren	intens. hellviolett	bläulich	10—15 [1])	deutlich [2])
Phenyl-β-Naphthol .	intens. dunkelviolett	grünlich	5—8 [1])	kaum [2])
Benzoin	gelblich	gelblich	3—5 [1])	—
Zn-Salz von organ. Sulfosäure	intens. hellgrün	keine	unter 2	deutlich [3])
$BaPtCy_4$ (Röntgenschirm)	gelbgrün	keine	unter 2	sehr stark [3])
Asche des photoakt. Papieres	bläulich-violett	grauviolett	5	keine
Borsäure	violett	grünlich	6	keine
Kalziumhypophosphit . . .	violett	blaßgelblich	3	—

wirkung auf die Platte. Fig. 3 zeigt die Wirkung der gleichzeitig und gleich lange bestrahlten Substanzen (von links nach rechts): Fluoren und links oben das (im Positiv) helle Quadrat an der Stelle, wo der Röntgenschirm die Platte berührte; in der Mitte den schwach hellen Streifen, der vom *Zn*-Salz der organischen Sulfosäure herrührt und rechts den wirkungslosen Streifen, dem Phenyl-β-Naphthol entsprechend. Die Einwirkung auf die Platte begann etwa 10 Sek. nach dem Abstellen der Bestrahlungsquelle und dauerte 16 Stunden. Am intensivsten ist hier die Wirkung des keine sichtbare Phosphoreszenz zeigenden Barium-Platinzyanürs (Röntgenschirm), weitaus schwächer, aber immerhin noch deutlich erkennbar die photochemische Wirkung des organischen Zinksalzes. Die Phosphoreszenzwirkung des Fluorens (vgl. Fig. 2) kommt zufolge der erst etwa 10 Sek. nach dem Abstellen der Lichtquelle erfolgten Exposition hier nicht mehr zur Geltung.

Es wurde schließlich noch ein Versuch zur Feststellung der Dauer der photochemischen Nachwirkung der U. V.-Lichtstrahlung mit dem Barium-Platinzyanür angestellt, dessen Ergebnis in Fig. 4 gezeigt wird. Die Einwirkung auf die Platte erfolgte bei diesem Versuch 24 Stunden nach der letzten U. V.-Bestrahlung des Schirmes, nachdem sich derselbe während dieser Zeit vollständig im Dunkeln befunden hatte. Die Exposition dauerte, da mit einer nur sehr schwachen Wirkung gerechnet wurde, 24 Stunden. Wie man aus Fig. 4 ersieht, ist die Wirkung, obwohl sie etwa nur ein Zehntel derjenigen in Fig. 3 ist, noch immer als sehr deutlich zu bezeichnen. Die photochemische Nachwirkung des u. v.-bestrahlten Barium-Platinzyanürs ist demnach nach 24 Stunden etwa erst auf ein Zehntel derjenigen nach dem Aufhören der Einstrahlung abgeklungen.

Von Interesse dürfte noch die Feststellung sein, daß ein analoger Intensitätsunterschied zwischen dem Röntgenschirm und dem organischen Zinksalz wie in Fig. 3 auch bei Bestrahlung dieser Substanzen mit Röntgenlicht bei 70 KV Belastung zu beobachten war.

Bei den im vorstehenden geschilderten Erscheinungen handelt es sich demnach um zwei deutlich voneinander verschiedene Komplexe: um sichtbare Phosphoreszenz und deren (kurzdauernde) photochemische Nachwirkung (Fluoren) bzw. um eine unsichtbare (u. v.?) Strahlung von relativ langer photochemischer Dauer ($BaPtCy_4$).

(Eingegangen 3. Dezember 1928.)

1) Je nach der Intensität der vorhergehenden Belichtung.

2) Sofort nach dem Aussetzen der U. V.-Bestrahlung.

3) Bei längerer Einwirkung auf die Platte, auch noch längere Zeit nach dem Aufhören der ursprünglichen Bestrahlung.

BESPRECHUNGEN.

Smith, D. M., Visual Lines for Spectrum Analysis. Dmi 8°. 34 S. London, Adam Hilger Ltd. 1928.

Das Büchlein ist dazu bestimmt, die Verwendung der qualitativen Spektralanalyse zur Erkennung geringer Spuren von Verunreinigungen zu erleichtern. Nach einer Besprechung der Benutzung des Kohlebogens und einer Zusammenstellung der für die spektralanalytischen Untersuchungen notwendigen Instrumente werden die für die einzelnen Elemente geeigneten Wellenlängen zusammengestellt. An bestimmten Beispielen wird die Anwendung des Nachweises von Spuren metallischer Verunreinigung in anorganischen Niederschlägen gezeigt. Ein besonderer Abschnitt behandelt die spektralanalytische Untersuchung von Glas.

Trotz der Kürze enthält das Büchlein alles für den oben beschriebenen Zweck notwendige und wird dadurch gerade dem, der sich nicht eingehend mit Spektroskopie befaßt, ein besonders wertvoller Führer sein. K. W. Meißner.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1929.

Technische Hochschule Aachen. **Starke:** Experimentalphysik II, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium, 4 und 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Seitz:** Theorie der Wechselströme, 2, Experimentalphysik, enzyklopädischer Kursus, 2; Übungen im physikalischen Praktikum, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Polis:** Klimatologie, 2; Aerologie, 1; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie für Studierende des Wasserbaufaches, 1; Meteorologische Technik, 1, Übungen, 2—4. — **Kirschbaum:** Photographie, 1, Übungen, 4; Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1.

Universität Basel. **Hagenbach:** Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, halb- und ganztägig, für Anfänger (mit Veillon), 8, für Mediziner und Ärzte, 2; Demonstrationsexperimente mit Übungen, 2; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 g. — **Matthies:** Mechanik deformierbarer Medien, 3, Übungen, 1; Theorie der elektromagnetischen Felder, 4, Übungen, 1; Mathematisch-physikalisches Seminar: Behandlung elementarer Aufgaben der Physik, 1. — **Veillon:** Radioaktivität und Atombau, 1. — **Zickendraht:** Theorie und Praxis der Elektronenröhre, 1, Praktikum, 2; Einführung in die Farbenlehre, 1. — **Zehnder:** Physik des Weltaufbaues, 1 g; Maschinenkunde für Chemiker II, 1. — **Bürki:** Die physikalisch-chemischen Grundlagen der Photographie und Kinematographie, 2; Photographisch-chemisches Praktikum, für Anfänger, 3, für Vorgerückte, 3. — **Wehrli:** Gasentladungen und Elektrolyte, 2. —

Universität Berlin. **Nernst:** Experimentalphysik: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Physikalisches Kolloquium (mit v. Laue), 2 g; Physikalische Forschungsarbeiten (mit Wehnelt, Pringsheim, Hettner, Czerny und Skaupy), tägl. — **Schrödinger:** Elektronentheorie, 4; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 g; Physikalisches Proseminar (mit Pringsheim und Hettner), 1½. — **v. Laue:** Theoretische Optik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 g. — **Hettner:** Allgemeine Mechanik, 4. — **Paschen:** Das Licht als Wellenbewegung, 2. — **Pringsheim:** Lumineszenzstrahlung, mit Vorführung von Versuchen, 2; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, 8. — **Henning:** Thermodynamik für Fortgeschrittene, 2. — **Simon:** Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen, 1. — **Ladenburg:** Experimentelle Grundlagen der Quantentheorie, 1. — **Reichenheim:** Positive Strahlen der Gasentladung, 1. — **Becker:** Grundzüge der Elektronentheorie, 2. — **Czerny:** Schwingungsvorgänge in der Mechanik und Elektrizität, 1. — **Bothe:** Wahrscheinlichkeitsprobleme in der Physik: Radioaktiver Zerfall, Brownsche Bewegung u. a., 1. — **Kallmann:** Einführung in die moderne Atomphysik mit seminaristischen Übungen (mit London), 3. — **Weissenberg:** Molekulartheorie der Festkörper, 1. — **Schüler:** Über die experimentelle Bestimmung von Konstanten aus der Atomphysik, 1. — **Trendelenburg:** Ausgewählte Kapitel der neueren Akustik, 1. — **Kiebitz:** Physikalische Grundbegriffe der Elektrotechnik, 1. — **Skaupy:** Die technischen Anwendungen der elektrischen Entladungen, mit Vorführungen, 1. — **Reichenbach:** Naturphilosophie, 2; Naturphilosophisches Seminar, 2 g. — **Gehrcke:** Einführung in die höhere Mathematik: Elemente der Differential- und Integralrechnung, unter besonderer Berücksichtigung der Anwendung in den Naturwissenschaften, 2. — **Byk:** Vektoren und ihre Anwendung in der Physik, 2. — **Frl. Lise Meitner:** Physikalisch-radioaktive Untersuchungen, tägl. — **Szilard:** Besprechung neuerer theoretisch-physikalischer Arbeiten (mit Kallmann), 1½ g. — **Wehnelt:** Physikalisches Anfängerpraktikum, 7. Ergänzungen, nach Vereinbarung g; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das naturwissenschaftliche Arbeiten, 3. — **Blasius:** Praktische Übungen für Fortgeschrittene, 7. — **v. Ficker:** Thermodynamik der Atmosphäre, 2; Anleitung zu meteorologisch-klimatologischen Arbeiten (mit Knoch), tägl. g. — **Hergesell:** Strömungsforschungen in der Atmosphäre, 1 g. — **Kähler:** Sonnen- und Himmelsstrahlung, 1. — **Robitzsch:** Probleme der Aerologie II, 1. — **Less:** Allgemeine Klima- und Wetterkunde, 1; Landwirtschaftliche Klimakunde, 1. — **Marcuse:** Luftfahrt in allgemeiner Darstellung, mit Lichtbildern, 1½. — **Knoch:** Klimaprobleme der gemäßigten und polaren Zonen, 1. — **Bartels:** Erdmagnetismus und Polarlicht, 1. —

Technische Hochschule Berlin. **Hertz:** Experimentalphysik, 4; Physikalische Übungen für Fortgeschrittene, 8; Anleitung zum selbständigen physikalischen Arbeiten, tägl.; Kolloquium über neuere Probleme aus den Gebieten der Physik und Chemie (mit Becker und Volmer), 2. — **Westphal:** Physikalische Übungen für Anfänger, 4. — **Becker:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 3, Übungen, 2; Elektronentheorie, Übungen, 2. — **Cranz:** Kolloquium über Probleme der technischen Physik (mit Angenheister, Becker, Engl, Gehlhoff, Hertz, Kock, Korn, Leithäuser, Pirani, Seegert, Schachenmeier, Schulz, Volmer, Weidert) 14tägig, 1½ g; Ausgewählte Kapitel aus der technischen Physik, 1¾, Übungen, 4. — **Schachenmeier:** Ausgewählte Probleme aus der theoretischen Physik, 1. — **Wigner:** Atombau und Quantentheorie II, 2. — **Angenheister:** Einführung in die Geophysik II, 2; Geophysikalisches Praktikum, nach Vereinbarung. — **Kassner:** Verteilung der Niederschläge auf der Erde nach Ursache, Menge und Häufigkeit, 1; Einführung in die Klimakunde, 1. — **Korn:** Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion, 1; Potentialtheorie, 4. — **Luyken:** Erdmagnetismus, nach Vereinbarung. — **Engl:** Akustische Eigenschaften geschlossener Räume, 1; Physik der Vakuumtechnik, 1; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Pirani:** Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme, mit besonderer Berücksichtigung graphischer Methoden I, 2, Übungen, 1. — **Gehlhoff:** Photometrie, 1. — **Weidert:** Geometrische Optik, 2; Seminar für Optisches Rechnen, 2; Optische Instrumentenkunde, 3; Übungen im Gebrauch optischer Instrumente, 3. — **Schulz:** Polarisationsapparate und Refraktometer, 1. — **Seegert:** Handfernrohre und bildaufrichtende Prismensysteme, 1; Entwicklung, Methoden und Ergebnisse der modernen Spektroskopie, 1. — **Herrmann:** Radioaktivität, 1; Ergebnisse der Kristallstrukturforschung, 2; Röntgen-Kristalluntersuchungen, tägl. — **Gehrts:** Elektronenemission glühender Körper I: Thermodynamisch-statistische Grundlagen, 1. — **Cassel:** Adsorptionskatalyse, 2. —

Universität Bern. Greinacher: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 5. Ergänzungen, 1; Physikalische Optik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Vorgerücktere, 3 halbe Tage; Physikalisches Vollpraktikum, tägl. — **Gruner:** Mechanik, 4; Vektoranalysis und Potentialtheorie, 2; Quantentheorie, 3; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Koestler:** Anwendung der Mathematik auf Biologie, 1—2; Theorie der elektrischen Wechselströme, 1—2; Statik: Theorie der statisch unbestimmten Systeme, 1—2. —

Universität Bonn. Konen: Experimentelle Elektrizitätslehre, 3; Experimentelle Optik, 2. Übungen, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 12, für Fortgeschrittene, tägl.; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, 1½ Tag; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Grebe und Mecke), 2 g. — **Pflüger:** Theorie des Lichtes, 4. Übungen, 1. — **Grebe:** Interferenz und Beugung des Lichtes, 2; Physik der Röntgenstrahlen, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik der Röntgenstrahlen, tägl. — **Hopmann:** Die Bearbeitung physikalischer und astronomischer Messungen, 2. — **Mecke:** Einführung in das Physikalische Praktikum, 1; Atomphysik, Radioaktivität, 2; Ausgewählte Kapitel der Spektroskopie, 1. — **Dannemann:** Übersicht über die Geschichte der Physik und die Entwicklung der chemischen Theorien, 1. — — — —

Technische Hochschule Braunschweig. Diesselhorst: Experimentalphysik II: Experimentelle Dynamik und Hydrodynamik, 2, III: Wärme, Mol.-Phys., Optik, 2; Ausgewählte Abschnitte aus der theoretischen Physik, 1; Vektorrechnung, mit Anwendungen, insbesondere aus der Mechanik, 2; Physikalisches Praktikum I, II; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 g. — **Bergwitz:** Radioaktivität mit Anwendungen, mit Versuchen, 2; Physik der Röntgenstrahlen, 1; Elektronisch-radiologisches Praktikum, 1 Nachmittag. —

Universität Breslau. Schaefer: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Senftleben und Bergmann), 3 oder 6, für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte (mit Senftleben und Bergmann), 3, für Fortgeschrittene (mit Steubing, Senftleben und Bergmann), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Reiche, Steubing und Waetzmann), 2 g. — **Reiche:** Allgemeine Mechanik, 5. Übungen, 1 g; Seminar über Quantenmechanik, 1 g. — **Steubing:** Einführung in die Photographie, 1 g; Apparate und Methoden der Spektroskopie, 1; Geschichte der Physik, 1; Photographische Übungen für Anfänger, 3. — **Jüttner:** Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik, 2. — **Senftleben:** Elektrische Entladungen in Gasen: Kathoden-Kanal-Röntgenstrahlen, mit Demonstrationen, 2. — **Bergmann:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Hochfrequenzpraktikum, 2. —

Technische Hochschule Breslau. Waetzmann: Experimentalphysik II, 4; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3; Physikalisches Zwischenpraktikum, 6; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Schaefer), 2. — **N. N.:** Aerostatik, nach Vereinbarung; Die Entwicklung der Luftfahrt, nach Vereinbarung. —

Deutsche Technische Hochschule Brünn. Lohr: Allgemeine und technische Physik; Geometrische Optik, Wärmelehre, Akustik, 3½; Physikalisches Praktikum, 3 und 2; Geometrische Optik, 2. —

Bergakademie Clausthal. Valentiner: Experimentalphysik II: Wärme und Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3; Physik im Bergbau, 1; Kolloquium, 2 g; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Rössiger:** Geophysikalische Geländeübungen, 2. —

Technische Hochschule Danzig. Buchwald: Experimentalphysik II, 4. Ergänzungen, mit Demonstrationen, 1; Kleines physikalisches Praktikum (mit Wolf), 3¾; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene I (mit Bartels), nach Vereinbarung, II, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Bartels), 1 g. — **Bartels:** Thermodynamik und kinetische Gastheorie, 4. Übungen, 2 g. — **Kalähne:** Einführung in die Radio- und Elektrophysik, zugleich Einführung in das Radiopraktikum, 1; Photographie und Reproduktionsverfahren, 1; Allgemeine Schwingungstheorie mit Demonstrationen, 2; Übungen in Photographie und Reproduktionsverfahren I, für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Großes radio- und photophysikalisches Praktikum, tägl.; Radio-Praktikum I und II, 4. — **Koschmieder:** Wetterkunde, 2. Übungen, 2; Meteorologisches Kolloquium, 2 g. — **Wolf:** Demonstrationspraktikum (mit Buchwald), 8; Praktisches Rechnen in Naturwissenschaft und Technik, 1 g; Ausgewählte Kapitel aus der Radioaktivität, 1. —

Technische Hochschule Darmstadt. Rau: Experimentalphysik unter besonderer Berücksichtigung der technischen Anwendungen: Elektrostatik, Elektromagnetismus, Strahlungserscheinungen, Atomphysik, 5; Physikalische Übungen, 3 Nachmittage, für Fortgeschrittene, 4 halbe Tage; Ausgewählte Kapitel aus der Physik, 1; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik, nach Vereinbarung; Physikalisches Kolloquium, 1 g. — **Zeissig:** Experimentalphysik: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, 3; Physikalische Meßkunde und Apparatebau, 2; Kolloquium in technischer Physik (mit Reutlinger), 1; Arbeiten aus der technischen Physik, nach Vereinbarung. — **Wagenbach:** Hydraulik, 2. Übungen, 2. — **Prager:** Himmelsmechanik, 2; Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Mechanik, 1. — **Baerwald:** Theorie der Wärme II, 3. — **Knipping:** Physikalisches Seminar für Fortgeschrittene (mit Baerwald), 2 g; Röntgenstrahlen, Ausgewählte Kapitel, 1; Röntgenpraktikum für Fortgeschrittene, 3. — **Georgii:** Spezielle Klimatologie, 1; Allgemeine Meteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Physik der freien Atmosphäre, 1; Theoretische Meteorologie, 1; Meteorologisch-flugwissenschaftliches Kolloquium, 2; Meteorologisch-aerologisches Praktikum, Meßflüge, 3; Wetterkundliche Übungen, 1; Allgemeine Flugmeteorologie, 2; Wetter und Wettervorhersage, 2. — **Limmer:** Photographische Übungen A, für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, 6, B für Anfänger und Fortgeschrittene, 3; Photographische Chemie und Chemikalienkunde, 1; Ausgewählte Kapitel aus dem Gesamtgebiete des Lichtbildwesens, 2; Photographische Ausflüge, 3; Einführung in die Kinematographie, mit Übungen, 1; Anwendungsgebiete der Hanauer Analysen-Quarzlampe, mit Übungen, 1. —

Technische Hochschule Dresden. **Dember:** Experimentalphysik II: Elektrizität und Magnetismus, Gasentladungen, Kathoden- und Röntgenstrahlen, 5; Physikalisches Praktikum I, 3 und 6, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Seminar, 14tägig, 1 g. — **Toepler:** Mechanik, speziell Schwingungen, 2, Übungen, 14tägig, 1; Ausgewählte Abschnitte aus der theoretischen Physik, 2; Hochspannungspraktikum, ausgewählte Aufgaben für Fortgeschrittene, 6; Größere physikalische Arbeiten, ganztägig; Kolloquium über Strahlenforschung (mit Wiedmann und Saupe), 1 g. — **Wiedmann:** Radioaktivität und Isotopenlehre, 1; Röntgentechnische und spektroskopische Übungen, 3; Selbständige Arbeiten, ganztägig. — **Alt:** Dynamische Meteorologie, 1. — **Goldberg:** Kinematographie, 1 g. — **Klughardt:** Optische Instrumentenkunde: Mikroskope, Fernrohre, Spektralapparate, 2; Die photographischen Objektive, 1. — **Luther:** Photochemie, 2; Photographisches Praktikum für Anfänger, 4 und 8, für Fortgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten, 2, 4, ganz- und halbtägig. — **Saupe:** Die biologische Wirkung der Röntgen- und Radiumstrahlen unter Berücksichtigung der Heilwirkungen, 1. — **Schmidt:** Seminar für mathematisch-naturwissenschaftliche Unterrichtslehre, 2 g; Didaktik der Himmelskunde mit Einführung in die Astrophysik II, 2 g; Geschichte des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts II, 2. —

Universität Erlangen. **Gudden:** Anschauliche (Experimental-) Physik I, 5; Besprechung physikalischer Tagesfragen (mit Reiger, Rump und Kohl), 1 g; Übungen, 4, für Fortgeschrittene, 20; Übungen zu physikalischen Vorführungen, 5 g; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Reiger:** Theoretische Physik: Elektrizität, 4; Elektrotechnische Übungen (mit Kohl), 3; Wissenschaftliche Arbeiten, 40. — **Rump:** Physik der Röntgenstrahlen, 1 g; Übungen im Messen der Röntgenstrahlen, 2 g; Einführung in die Tiefenbehandlung mit Röntgenstrahlen, für Mediziner (mit Wintz), 1 g. — **Kohl:** Experimentalphysik V, 2. —

Universität Frankfurt/M. **Wachsmuth:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Kristalloptik, 1 g; Repetitorium der Experimentalphysik II, 1; Physikalisches Kolloquium (mit Madelung und Meissner), 14tägig, 2 g; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, tägl., für Mediziner, 2; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten (mit Meissner), tägl. — **Meissner:** Höhere Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, 3, Übungen, 1 g; Experimentelle Strahlungslehre, 1; Die Weltkörper des Sonnensystems: Planeten und Kometen, 1 g; Astronomisches Praktikum, 4; Astrophysikalisches Praktikum, 4; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten auf dem Gebiete der Astrophysik, tägl. — **Brendel:** Orts- und Zeitbestimmung: Sphärische Astronomie, 2. — **Madelung:** Optik, 4, Übungen, 1; Quantenmechanik, 2; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Mauz:** Schwingungen und Wellen in der Physik, 1. — **Seddig:** Photographisches Praktikum, 4 oder 8; Leitung selbständiger Arbeiten aus dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, tägl.; Übungen zur optischen Projektion und Anstellen von Vorlesungsversuchen, 14tägig, 2. — **Déguisne:** Der elektrische Wechselstrom, 3; Die elektrische Wechselstrommaschine, 1 g; Kleines elektrotechnisches Praktikum, 6; Großes elektrotechnisches Praktikum, 6 halbe Tage; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig; Kolloquium über angewandte Physik (mit Dessauer), 1. — **Dessauer:** Einführung in die medizinische Physik II: Magnetismus, Elektrizitätslehre, 1½; Technische Anwendung der Röntgenstrahlen, 1; Struktur der Materie im Lichte der modernen Atomforschung, mit besonderer Berücksichtigung der medizinischen Anwendungen, 1; Kolloquium für medizinische Physik: Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten und Probleme, 2; Wissenschaftliche Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. — **Linke:** Atmosphärische Elektrizität, 2; Spezielle Klimatologie, 1; Meteorologisch-geophysikalisches Praktikum (mit Stüve), 2; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, nach Vereinbarung, g. — **Gutenberg:** Geotektonische Hypothesen vom physikalischen Standpunkt, 1; Geophysikalische Übungen für Anfänger, 2. — **Stüve:** Statik und Thermodynamik der Atmosphäre, 2. — **N. N.:** Meteorologische Instrumente, 1. —

Bergakademie Freiberg. **Brion:** Elektrotechnik, 3; Elektrotechnisches Praktikum, 2; Experimentalphysik, 4; Physikalisches Praktikum, 2; Elektrotechnisches Kolloquium, nach Vereinbarung. — **Aeckerlein:** Praktikum zu Elektronik und Radioaktivität, 3. — **Papperitz:** Aktuelle Probleme der mathematischen Physik, 1. —

Universität Freiburg i. Br. **Mie:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Quantenmechanik, 2; Physikalische Übungen, 6, für Fortgeschrittene (mit Kast), halbtägig; Kleines physikalisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, ganztägig; Physikalisches und physikalisch-chemisches Kolloquium (mit v. Hevesy), 2 g. — **Kast:** Experimentalphysik IIIb: Atomphysik, 3. — **Bühl:** Technische Physik: Wechselstrom, elektrische Schwingungen, 2. — **Koenigsberger:** Mathematische Physik: Elektrische, akustische, quantenmechanische Wellen, mit Übungen, 5; Anwendungen der Geophysik: Vorlesung und Praktikum, 3 g; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Cohn:** Das elektromagnetische Feld II, 3. — **Hammer:** Elektrizität in Gasen, 1. — **v. Hevesy:** Einführung in die Physikalische Chemie, 3; Physikalisch-chemische Übungen, halbtägig; Selbständige Arbeiten auf dem Gebiete der physikalischen Chemie; Kolloquium über neuere chemische Arbeiten für Vorgerücktere (mit Staudinger), 1 g. — **Böhm:** Die röntgenographischen Untersuchungsmethoden: Kristallstruktur und chemische Analyse, 2. —

Universität Freiburg (Schweiz). **Joye:** Experimentalphysik, 5, Ergänzungen, 2, Repetitorium, 1; Praktische physikalische Übungen, 2; Physikalisches Laboratorium für Anfänger, 12, für Fortgeschrittene und Untersuchungsarbeiten, tägl. außer Montag. — **Brasey:** Theoretische Einleitung zu den physikalischen Übungen, 1. —

Universität Gießen. **König:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Großpraktikum: Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten (mit Cermak), tägl.; Physikalisches Anfänger-Praktikum (mit Cermak), 6; Physikalisches Praktikum (mit Cermak), 3; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14tägig, 2 g; Physikalisches Kol-

loquium (mit Cermak und Jaffé), 14tägig, 2. — **Jaffé:** Wärmetheorie, 4; Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie, 1; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Cermak:** Höhere Experimentalphysik: Spektralanalyse, 1; Handfertigkeitspraktikum, 3. — **Uller:** Vektoranalysis, 1; Gleich- und Wechselstromtechnik II, 1; Einführung in die Geophysik, 1; Anleitung zu selbständigen theoretisch-physikalischen Arbeiten, tägl. — **Lihotzky:** Projektionstechnik, 1. — **Fromme:** Niedere Geodäsie, mit praktischen Übungen, 7; Synoptische Meteorologie, 2. —

Universität Göttingen. **Franck:** Elektrizitätsleitung durch Gase, 1; Physikalisches Praktikum, 7 und 4; Physikalisches Seminar (mit Born), 2 g; Physikalisches Kolloquium (mit Born, Pohl und Reich), 2 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Born:** Thermodynamik, 5; Seminar über Struktur der Materie, nach Vereinbarung, g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, g. — **Pohl:** Experimentalphysik I: Mechanik, Schwingungslehre, Wärme, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Hertz:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4, Übungen, 1; Philosophische Voraussetzungen der Naturwissenschaften, nach Vereinbarung. — **Schuler:** Angewandte Schwingungslehre, 2. — **Cauer:** Theorie der Wechselstromschaltungen, 1. — **Frl. Sponer:** Radioaktivität, 1. — **Sommer:** Röntgenspektroskopie und Kernphysik, 1. — **Nordheim:** Einführung in die Wellenmechanik, 2. — **N. N.:** Einführung in die physikalische Statistik. — **Cario:** Physikalisches Proseminar (Ergänzung zum Praktikum) (mit Oldenberg), 2. — **Reich:** Angewandte Elektrizität II: Schwingungen und drahtlose Telegraphie, mit Experimenten, 2; Elektrophysikalisches Praktikum, 3; Seminar über angewandte Elektrizität, 2 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Elektrizität, tägl. — **Prandtl:** Graphische und analytische Statik, 4, Übungen, 2; Festigkeitspraktikum, 3; Besprechung von Fragen der angewandten Mechanik, Hydrodynamik und Aerodynamik (mit Betz und Schuler), 2 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Mechanik, tägl. — **Betz:** Rechenmethoden der Hydrodynamik, mit Übungen, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Aerodynamik, tägl. — **Angenheister:** Einführung in die Geophysik, 2 g; Meteorologie, 1 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. g. —

Universität Graz. **Benndorf:** Experimentalphysik: Schwingungsprobleme in der Physik, 3; Physikalisches Rechnen, 2; Physikalische Übungen für Anfänger I (mit Rumpf), 6, II, 9; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend, g; Besprechung physikalischer Fragen (mit Radaković und Hess), 2 g. — **Hess:** Experimentalphysik II, 5; Physikalische Besprechungen, 1 g. — **Rumpf:** Einführung in die Elektrotechnik II, 2. — **Rosenberg:** Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3. — **Radaković:** Elektrizität, 5; Seminar für theoretische Physik, 2 g. — **Brell:** Einführung in die Wellenmechanik, 2. — **Hillebrand:** Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, mit besonderer Berücksichtigung physikalischer Fragen, 5. —

Technische Hochschule Graz. **Kohlrausch:** Physik III: Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum, 6. —

Universität Greifswald. **Krüger:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum, 3; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten: Kolloquium (mit Seeliger), 1½. — **Seeliger:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 3, Übungen und Ergänzungen, 14tägig, 2; Seminar über Elektrostatik und Magnetostatik, 14tägig, 2; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl. — **Reinkober:** Radioaktivität, 2; Einführung in das physikalische Praktikum: Maßeinheiten und Meßmethoden in Elektrizität und Optik, 2 g; Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 3. — **Mierdel:** Kinetische Theorie der Materie, 2. — **Backhaus:** Angewandte Elektrizitätslehre I: Gleichstrom, 2. —

Universität Halle. **Hoffmann:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Wechselstrom und elektrische Wellen, 2; Physikalisches Praktikum, 6, 3 und 2; Elektrotechnisches Praktikum, 6; Physikalisches Kolloquium (mit Smekal), 2 g; Anleitung zu selbständigen physikalischen Arbeiten (mit Hanle), tägl. — **Smekal:** Elektrizität und Magnetismus, 4; Elektrizitätsleitung in Metallen, 1; Seminar für theoretische Physik, 2 g; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Hanle:** Physikalische Optik, 4; Physikalisches Proseminar, 14tägig, 2. —

Universität Hamburg. **Koch:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 4; Physikalisches Praktikum (mit Goos, L. Müller und Minkowski), 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Lenz, Möller und Stern), 2 g. — **Lenz:** Thermodynamik, 3, Übungen, 1; Theoretisch-physikalisches Vortragsseminar (mit Stern und Jordan), 2 g. — **Gordon:** Maxwellsche Theorie, 2. — **Jordan:** Allgemeine Relativitätstheorie, 1. — **Minkowski:** Fragen aus dem Grenzgebiet zwischen Physik und Chemie, 2. — **Goos:** Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops, 1. — **Estermann:** Physikalisches Proseminar (mit Jordan und Minkowski), 1½; Photographisches Praktikum, 2½. — **L. Müller:** Anleitung zur Ausführung von physikalischen Schulversuchen, 2. — **Jensen:** Himmelsphotometrie, 2. — **Stern:** Physikalische Chemie I, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Estermann), 4 Wochen; Physikalisch-chemische Übungen (mit Estermann), 1 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, tägl. — **Möller:** Elastizität und Festigkeit, mit Demonstrationen, 2, Übungen, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener, tägl.; Maschinenlehre mit Vorführungen, 1. — **Wigand:** Aerologie: Meteorologie der freien Atmosphäre, 2; Meteorologisches Praktikum, 4; Meteorologisches Vortragsseminar, 14tägig, 2; Aerophysikalische Forschungsarbeiten, halb- oder ganztägig. — **Kuhlbrodt:** Praktische Übungen zur Witterungskunde: Wetterdienst, 14tägig, 2. —

Technische Hochschule Hannover. **Precht:** Experimentalphysik, 4; Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Laboratorium für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägig; Physikalisches Kolloquium (mit Herweg), 2. — **Seilkopf:** Synoptische Meteorologie, 2. —

Herweg: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik, 2, Übungen, 1; Drahtlose Telegraphie und Telephonie II, 2; Hochfrequenzpraktikum, 3; Arbeiten im Hochfrequenzlaboratorium für Fortgeschrittene, 6.

Universität Heidelberg. Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Schmidt), 6; Physikalisches Seminar und theoretisch-physikalische Übungen (mit Becker), 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker und Schmidt), tägl. außer Sonnabend. — **Becker:** Wärmetheorie, 4; Kinetische Gastheorie, 1. — **Schmidt:** Radiologie: Wellenstrahlung, 2. —

Landwirtschaftliche Hochschule Hohenheim. N. N.: Experimentalphysik, einschließlich Meteorologie und Klimatologie II, 4; Physikalische Übungen, 2; Physikalische und meteorologische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Vereinbarung, g. —

Universität Jena. Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum (mit v. Hippel), 6, 4 und 3, für Fortgeschrittene (mit Seminar) (mit Joos und v. Hippel), 10; Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel, Joos und v. Hippel), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Esau, Joos und Jentzsch), 2 g. — **Auerbach:** Entwicklungsgeschichte der modernen Physik, zugleich als Übersicht der Tatsachen, Gesetze und Theorien, 3. — **v. Hippel:** Experimentalphysik für Fortgeschrittene III: Elektrizitätslehre, 2. — **Joos:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 3; Atommechanik, 2; Theoretisch-physikalisches Seminar (mit Wessel): a) Übungen zur Elektrizitätslehre, 1, b) Vortragsseminar für höhere Semester, 1 g; Anleitung zu selbständigen theoretisch-physikalischen Arbeiten, tägl. — **Wessel:** Theorie und Anwendung physikalisch-wichtiger Funktionen, 1. — **Esau:** Wechselstromtechnik, 3; Ausgewählte Kapitel der Fernsprechtechnik, 1; Kraftmaschinen, 1; Technisch-physikalisches Praktikum, 3; Großes technisch-physikalisches Praktikum, tägl.; Technisch-physikalisches Seminar, 2 g. — **Jentzsch:** Technische Physik der Glühlampe, 1; Doppelbrechende und absorbierende Körper, 2; Einführung in die wissenschaftliche Mikroskopie, mit Übungen, 2; Praktikum der optischen Untersuchungsmethoden, 3; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl.; Optisches Seminar, 14tägig, 2. — **Siedentopf:** Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroskopie, mit Übungen, 1. — **Sieberg:** Vulkanismus, 1; Seismologisches Praktikum, nach Vereinbarung, g. — **Meisser:** Irdische Schwere, 1; Geophysikalisches Praktikum (mit Hecker), 1 g. —

Universität Innsbruck. Lerch: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 g; Die Elektronenröhre, 1 g. — **March:** Theorie der Strahlung und der Quanten, 4; Grundzüge der speziellen Relativitätstheorie, 1; Seminarübungen, 2 g. — **Sonvico:** Einführung in die Starkstromtechnik II, 2. — **N. N.:** Astrophysik II: Die Weltkörper des Sonnensystems, 4; Astrophotographisch-photometrisches Praktikum, 1; Übungen für Fortgeschrittene, nach Vereinbarung. — **Wagner:** Wettervorhersage: Synoptische Meteorologie, 3; Erdmagnetismus, 2; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, 10 g. — **Oberguggenberger:** Astronomische Meßwerkzeuge, 1. —

Technische Hochschule Karlsruhe. Gaede: Physik I B, 2, II B, 2; Physikalisches Laboratorium, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Peppler:** Angewandte (synoptische) Meteorologie, 2; Meteorologische Übungen, 4. I und II, 2. — **Riede:** Technische Optik A: Geometrische Optik, 2; Atom und Molekül im Lichte der neuen physikalischen Anschauungen, 1 g. — **Braunbek:** Theoretische Physik A: Schwingungen elastischer Systeme, 2. —

Universität Kiel. Geiger: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Besprechung neuerer physikalischer Fragen, nach Vereinbarung; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Zahn), 4, für Vorgeschrittene, 8; Forschungsarbeiten (mit Kossel), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Kossel und Zahn), 1½ g. — **Zahn:** Ergänzungen zur Experimentalphysik: Vorführung und Besprechung ausgewählter Versuche, 2. — **Kossel:** Thermodynamik, 4, Übungen, 1; Ausgewählte Fragen der theoretischen Physik, für Vorgeschrittene, 1 g. — **Martienssen:** Einführung in die Elektrotechnik, 2. — **Schmidt:** Anleitung zu physikalischen Schülerübungen, 1. —

Universität Köln. Rinkel: Experimentalphysik I: Mechanik, Optik, Akustik, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 7; Großes physikalisches Praktikum, 28. — **Försterling:** Thermodynamik, 4; Wissenschaftliche Arbeiten für theoretische Physik, tägl.; Kolloquium über neuere physikalische Arbeiten (mit Rukop), 2 g. — **Malsch:** Ausgewählte Kapitel aus der Wärmelehre, 2. — **Rukop:** Technische Elektrizitätslehre II: Elektrische Schwingungen, Hochfrequenztechnik, 4, Seminar, 1; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Wever:** Kristalle und Röntgenstrahlen, 2. — **Lassen:** Elektrische Schaltvorgänge und Vorgänge bei Organen von nichtlinearer Charakteristik, 1. —

Universität Königsberg. Kaufmann: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum (mit Gans), 6 und 3; Physikalisches Kolloquium (mit Gans und Kretschmann), 14tägig, 2 g; Physikalisches Proseminar (mit Gans und Kretschmann), 14tägig, 2 g. — **Gans:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Übungen zur theoretischen Physik, 1 g; Experimentelle und theoretische physikalische Arbeiten, für Fortgeschrittene, ganztägig. — **Steinke:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 2, Übungen, 1. — **Stuart:** Experimentalphysik III, 3. — **Kretschmann:** Mechanik, 4, Übungen, 1 g. —

Universität Leipzig. Debye: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Höhere Physik, experimentelle und mathematische Ergänzungen zur allgemeinen Experimentalphysik, 1; Physikalisches Praktikum (mit Möbius und Kämpf), 3, 6 oder 9, für Mediziner, Veterinärmediziner, Zahnärzte und Pharmazeuten (mit Möbius und Kämpf), 3; Praktikum für Fortgeschrittene (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), 9; Selbständige physikalische Arbeiten (mit Marx, Schiller, Karolus, Möbius und Kämpf), tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Heisenberg), 1½ g. — **Heisen**tikum für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches

berg: Elektrodynamik, 4. Übungen, 1 g; Anwendung der Quantenmechanik, 1; Seminar über die Struktur der Materie, 2; Selbständige theoretisch-physikalische Arbeiten (mit H. Schmidt), tägl. — **Marx:** Grundlagen von Atombau und Spektrallinien, mit Experimenten, 2; Radiologisches Praktikum, 2. — **Schiller:** Elastizität und Festigkeit, 2. — **Karolus:** Elektrotechnik II: Wechselströme, 2. Praktikum, 3. — **Möbius:** Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen, 1. — **Kämpf:** Repetitorium der Physik, 2. — **H. Schmidt:** Vektor- und Tensoranalysis, 3. — **Weickmann:** Allgemeine Meteorologie II: Die Klimate der Erde mit spezieller Behandlung Europas, 2 g; Thermodynamik der Atmosphäre, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl. g; Geophysikalisches Praktikum, 3; Geophysikalisches Kolloquium, 2 g. —

Universität München. N. N.: Experimentalphysik I: Mechanik, Schall, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Übungen für Fortgeschrittene, ganztägig. — **Sommerfeld:** Partielle Differentialgleichungen der theoretischen Physik, 4. Übungen, 2 g; Seminar, 2 g; Ausgewählte Kapitel aus der Wellenmechanik, 1. — **Schmauss:** Meteorologie II, 4; Meteorologisches Kolloquium, 1 g. — **Graetz:** Einleitung in die theoretische Physik II, 4. Übungen, 1. — **Rüchardt:** Höhere Experimentalphysik II: Molekularphysik, 1½; Seminar über neuere Fragen der Experimentalphysik (mit Kirchner), 1½ g. — **Kirchner:** Lichtelektrische Erscheinungen, mit Experimenten, 1. — **Geiger:** Das Gewitter und gewitterähnliche Erscheinungen, 1. — **Wenzl:** Philos. Bedeutung der neueren theoretisch-physikalischen Entwicklungen (spez. Relativitätstheorie und Quantentheorie), 1. —

Technische Hochschule München. Zenneck: Experimentalphysik II: Elektromagnetisches Feld, elektromagnetische Schwingungen, Ionen und Elektronen, Elektrooptik, 4; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8, für Fortgeschrittene (mit Kulenkampff), halbtägig; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten (mit Kulenkampff), ganztägig. — **Fischer:** Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Schwingungs- und Wellenlehre aus dem Gesamtgebiete der Physik, 3; Feinmessungen und Feinmeßwerkzeuge der Technik, 2; Praktisch-physikalische Übungen, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik: Anleitung zu selbständigen Arbeiten, 8. — **Emden:** Hydrodynamik, 2. — **v. Angerer:** Physik der Kolloide, 1. — **Kulenkampff:** Experimentelle Methoden der Atomphysik, 1. — **Kühl:** Theorie des Fernrohrs, 2. — **Dieckmann:** Hochfrequenzmeßtechnik, 2, Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der angewandten Physik, halb- oder ganztägig. — **Huber:** Das Gewitter und die Gewittertheorien, 1; Klima und Leben, 1. — **Knoblauch:** Kinetische Gastheorie, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Vereinbarung. — **Reiher:** Spezielle Probleme auf dem Gebiete der Wärmeübertragung, 2; Schalltechnik, 2. — **Nusselt:** Mechanische Wärmetheorie, 3, Übungen, 2, Oberstufe, 2. —

Universität Münster. Schmidt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Szivessy), 3 oder 6, für Mediziner, 3; Physikalisches Prak-Seminar (mit Durau), 14tägig, 2 g. — **Kratzer:** Optik, 4. Übungen, 2 g; Elektronentheorie, 3; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 g. — **Szivessy:** Vektoranalysis, 4. — **Siemens:** Ausgewählte Kapitel aus der Elektrotechnik mit Vorführungen und Lichtbildern, 2. — **Durau:** Lichtelektrische Erscheinungen, 1. —

Deutsche Universität Prag. Rausch-Traubenberg: Experimentalphysik II, 5; Physikalisches Praktikum II, 3 bzw. 6, für Mediziner, 3; Physikalisches Seminar, 2; Physikalisches Kolloquium (mit Frank und Fürth), 2 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Frank:** Elektromagnetische Wellen, 2; Quantenmechanik und Wellenmechanik, 3; Seminar für theoretische Physik, 2. — **Fürth:** Einführung in die theoretische Physik IV: Kinetische Theorie der Elektrizität des Magnetismus und der Strahlung, 5, Übungen, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene (theoretisch und experimentell), ganztägig, g. — **Funk:** Mathematische Behandlung einiger technisch wichtigen Probleme der Mechanik und Physik: Elastizitätstheorie, 2. — **Spitaler:** Allgemeine Meteorologie II, 4; Anleitung zur Anstellung und Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen, 1. — **Pollak:** Erdmagnetismus, 2; Theorie des Erdmagnetismus, 2. —

Deutsche Technische Hochschule Prag. Tuma: Physik: Reine Mechanik, 5; Technische Physik, 3; Physikalisches Praktikum, 3 und 6. — **Lichtenecker:** Ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **N. N.:** Physik, 3. — **Koerner:** Allgemeine Wärmelehre, 2. — **Spitaler:** Meteorologie und Klimatologie, 3. —

Universität Rostock. Füchtbauer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 4; Physikalische Übungen, 8; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar (Kolloquium), 14tägig, 1½ g. — **Falckenberg:** Meteorologisches Praktikum für Anfänger, 5; Meteorologisches Praktikum für Fortgeschrittene, tägl. — **Waibel:** Lichtelektrische Erscheinungen, 1. — **Kunze:** Theoretische Optik, 2. —

Technische Hochschule Stuttgart. Regener: Physik II: Wärme, 2, IV: Elektrische Wellen und Optik, 3; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittenere, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten in der Physik, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Ewald), 1½. — **Ewald:** Theoretische Physik II: Thermodynamik, mit Übungen, 6; Einführung in die Kristallphysik, 1 oder 2; Seminar über Atomphysik, 1½; Anleitung zu Arbeiten aus dem Gebiete der theoretischen Physik, nach Vereinbarung. — **Braunbek:** Physikalische Messungen, 2; Raumakustik und andere ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **Glocker:** Röntgenpraktikum für Anfänger, 3, für Fortgeschrittene, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im Röntgenlaboratorium, nach Vereinbarung; Materialprüfung mittels Röntgenstrahlen, 1; Materialprüfungspraktikum, 3. — **Dehlinger:** Aufbau und Technologie kristalliner Stoffe: Röntgenographische Untersuchungsmethoden, 2. —

Universität Tübingen. Gerlach: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Elektromagnetische Strahlung, 1; Physikalische Übungen für Anfänger, 4, für Fortgeschrittene, tägl.; Physikalisches Seminar für Fortgeschrittene, 1 g; Wissenschaftliche physikalische Untersuchungen

(mit Back und Schütz), ganztägig; Physikalisches Kolloquium, 2 g. — **Back:** Molekülspektra, 1. — **Schütz:** Physik der photographischen Platte, 1. — **Landé:** Theorie der Elektrizität, 3; Quantentheorie, 2. —

Hochschule für Landwirtschaft und Brauerei Weihenstephan. Frank: Experimentalphysik II: Elektrizität II, Optik, 3; Angewandte Physik, mit Übungen, 2; Physikalische Übungen für Landwirte, 2, für Fortgeschrittene, 4; Feldmessen und Nivellieren, mit Übungen, 2. —

Universität Wien. Jäger: Optik, 5; Ausgewählte Kapitel der Akustik, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl.; Besprechungen neuerer Arbeiten, 1 g. — **Meyer:** Die radioaktiven Substanzen, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. g; Radioaktives Praktikum (mit Przibram), 3 g. — **Ehrenhaft:** Experimentalphysik II, 5, Theoretische Ergänzungen, 1 g, Demonstrationsergänzungen, 1 g, Seminar, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. g. — **Schweidler:** Experimentalphysik II, 5, Demonstrationsergänzung, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. g. — **Thirring:** Mechanik II, 5; Seminar für theoretische Physik, 1 g; Proseminar für theoretische Physik, 1 g. — **Haschek:** Physikalisches Praktikum, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, 12. — **Kottler:** Quantentheorie des Atoms, 5. — **Przibram:** Experimentelle Atomistik (Fortsetzung), 3. — **Haas:** Die statistische Begründung der thermodynamischen Prinzipe, 1. — **Hauer:** Repetitorium für Physik, 2; Akustik mit besonderer Berücksichtigung der Musiker, 2. — **Mache:** Temperaturmessung, 2. — **Flamm:** Partielle Differentialgleichungen der Physik II, 3. — **Konstantinowsky:** Die Physik des Starkstromkabels II, 1. — **Ettenreich:** Glühlampentechnik, 2. — **Kirsch:** Atomzertrümmerung II, 2. — **Stetter:** Entladungen im Vakuum, Hochvakuumtechnik, 2. — **Mattauch:** Ausgewählte Kapitel aus der experimentellen Quantenphysik: Elektronenstoß-Versuche, 1. — **Exner:** Bewegungsformen von Flüssigkeiten und Geschieben auf der Erde, 3; Besprechung neuerer Arbeiten aus Meteorologie und Geophysik (mit Conrad), 2 g. — **Conrad:** Allgemeine Klimatologie II, 2. — **Graff:** Einführung in die Astrophysik II: Physik des Sonnensystems, 4; Astronomisch-astrophysikalische Übungen für Vorgeschrittene, 3. —

Technische Hochschule Wien. Mache: Physik: Optik, Wärmelehre, 5; Temperaturmessung, 2; Physikalisches Praktikum I, 8, II, 30 und 4. — **Flamm:** Physik, 5; Theorie der Elektrizität, 3; Allgemeine Relativitätstheorie, 1. — **Aigner:** Physik, 3 und 2; Elektrische Meßinstrumente, 2. — **N. N.:** Partielle Differentialgleichungen der Physik, 3; Kristallphysik III: Thermodynamik und Wärmeleitung, 2. — **Bauer:** Quantentheorie der optischen Spektren, 2; Grundzüge der Wellenmechanik, 1. —

Universität Würzburg. Harms: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Physikalisches Praktikum, 3 oder 6; Praktikum für Fortgeschrittene, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig. — **Ott:** Theoretische Physik I, 4; Übungen zur theoretischen Physik I; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, ganztägig.

Universität Zürich. Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5, Ergänzungen, 1, Seminar (mit Bär), 2 g; Physikalisches Kolloquium (mit Wentzel), 2 g; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3½, für Vorgerücktere, halbtägig, Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. — **Wentzel:** Quantentheorie, 4, Übungen, 1; Seminar für theoretische Physik, 2; Kristalloptik, 1; Wellenmechanik (Fortsetzung), 1. — **Ratnowsky:** Vektor- und Tensoranalysis I: Vektoranalysis, 2. — **Bär:** Radiologisches Praktikum, 3; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Optik, 1. —

Technische Hochschule Zürich. Scherrer: Physik II, 4, Repetitorium, 1; Neuere Probleme der physikalischen Meßtechnik, 2; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12 und 24; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Tank), 4, 6, 8; Physikalisches Kolloquium (mit Pauli und Tank), 2. — **Pauli:** Thermodynamik, 3, Übungen, 1; Elektro- und Magnetooptik, 2. — **Tank:** Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 2; Optik, 2; Drahtlose Telegraphie II, 1; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12 und 24. — **Ackeret:** Aerodynamik II, 1, Übungen, 1. — **Amberg:** Allgemeine Didaktik des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, 2. — Rüst: Photographie II, 1; Photographisches Praktikum, 2. — **Trümpler:** Der dritte Wärmesatz und seine chemischen Anwendungen, 1. — **Wyss:** Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern, 1. —

Berichtigung

zu der Besprechung: E. G. Richardson „Sound", Physik. Zeitschr. 29, 855, 1928.

Durch ein Versehen kann aus der Besprechung der Eindruck gewonnen werden, daß das Buch besonders ein Maßstab für die Gründlichkeit der amerikanischen Schallforschung sei. Es soll deshalb hervorgehoben werden, daß der Verfasser Dozent der Universität London ist, und daß der letzte Absatz heißen soll: „Das Buch zeigt, mit welcher Systematik englische Forscher auf dem Gebiete der Akustik arbeiten." Reiher.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Die Privatdozenten an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Mallison (Chemie und Technologie des Steinkohlenteers), Dr. Julius Obermiller (Chemische Technologie) und Dr. J. Wallot (Physik) zu a. o. Professoren an derselben Hochschule.

Neuer Lehrauftrag: Der a. o. Professor an der Universität Münster Dr. Guido Szivessy für Technische Physik an der Universität Bonn.

Gestorben: Der ord. Professor für Pharmazeutische Chemie an der Universität Münster Geh. Regierungsrat Dr. Georg Kassner.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.